Inhaltsverzeichnis

Allgemeine Grundlagen

Punktmengen im R²

Bedingungen aufschreiben, nach y umstellen und Zeichne. Ist y > x bedeutet das alle Punkte, welche oberhalb des Grafen liegen, gemeint sind.

Betrag

Bei der Bedingungsaufstellung auf x ≥ 0 achten!

Benuliesche Ungleichung

Für: x > (-1) & x ≠ 0 & n ∈ N | n ≥ 2
gilt:

$$\boxed{(1+n)^n > 1+n\cdot x}$$

Dreiecksungleichung

$$\boxed{a+b\geq c}$$

Binomischer Lehrsatz

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cdot a^{(n-k)}\cdot b^k = (a+b)^n}$$

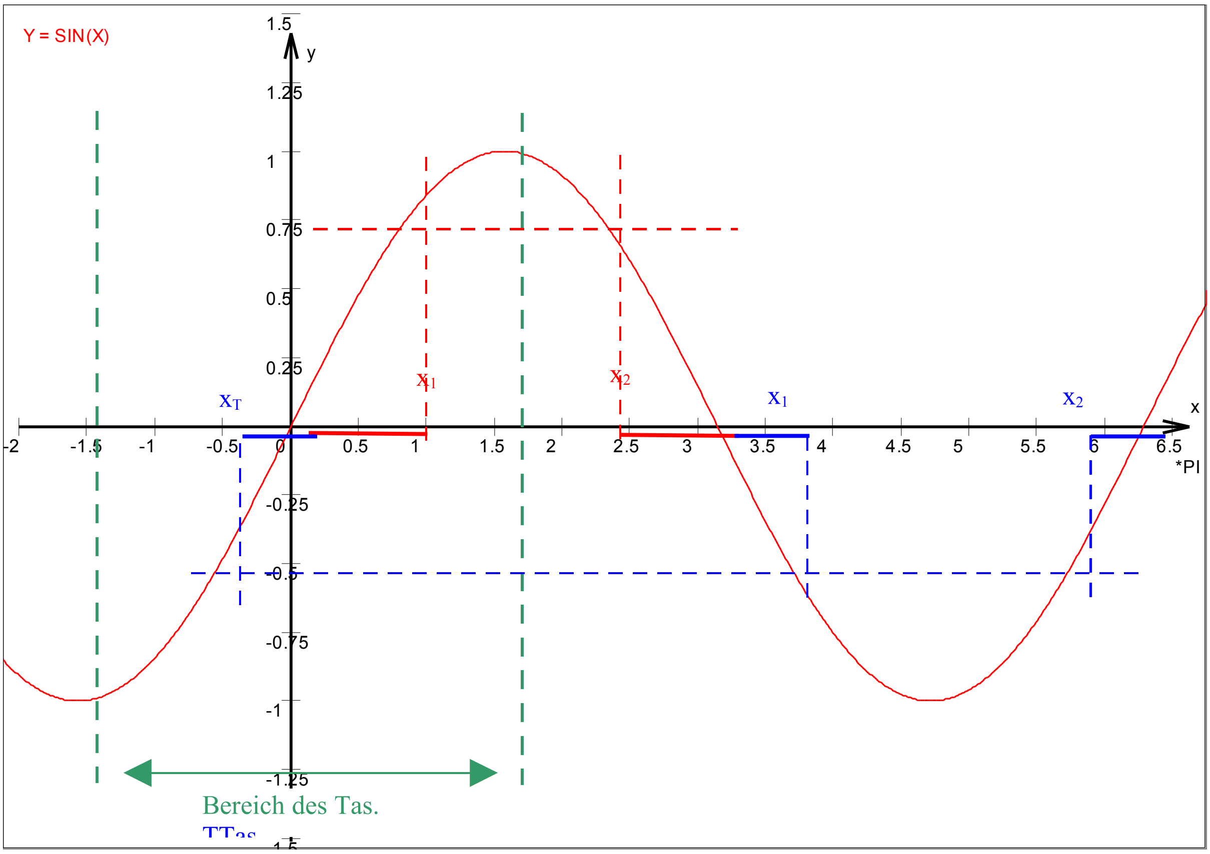
$$\boxed{\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!} \; ; \; \binom{n}{n} = \binom{0}{0} = \binom{n}{0} = 1 \; ; \; \binom{n}{1} = n}$$

Faktorisierte Schreibweise eines Polynoms

$$\boxed{f_{(x)} = a_n\cdot(x-1)\cdot(x+1) = -2x^2+2}$$

Winkelfunktionen

Sinusfunktion

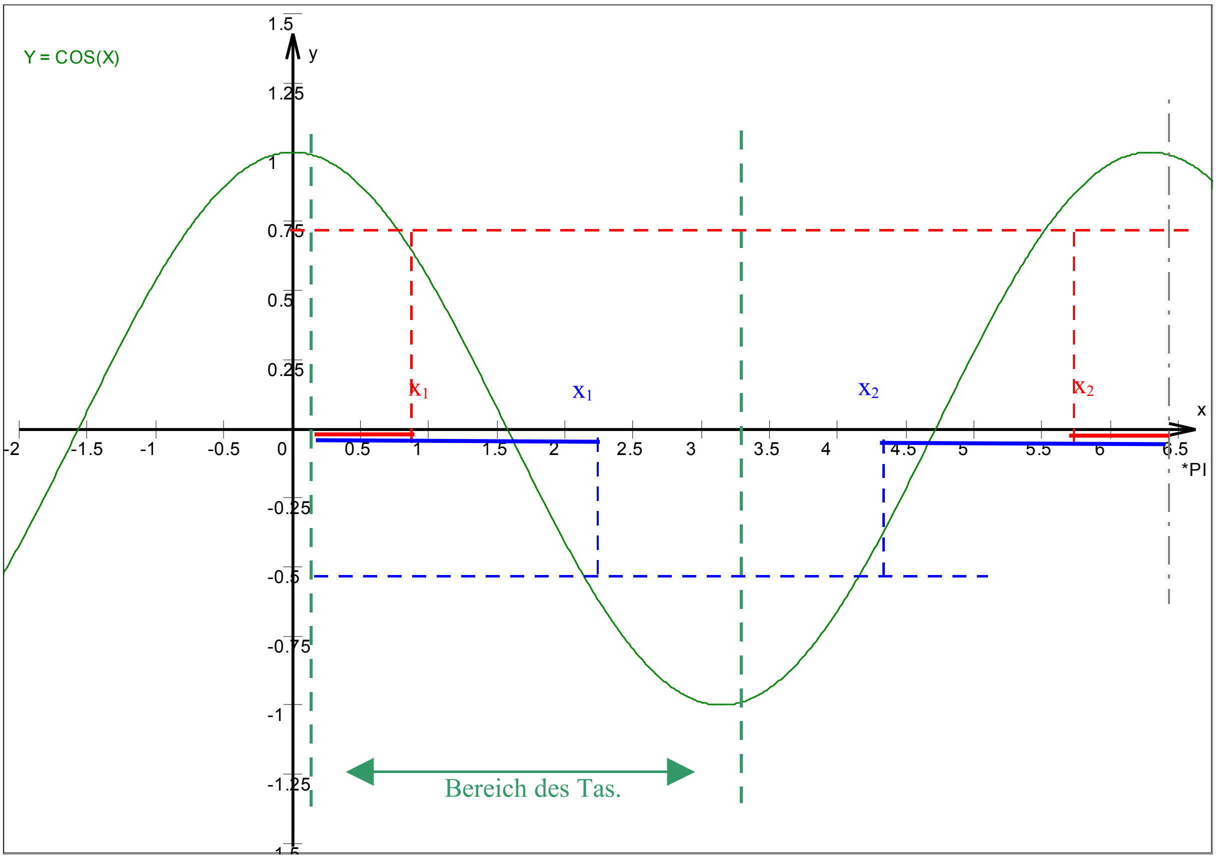


y - Wert ist **positiv**	y – Wert ist **negativ**
$\sin x = 0{,}75$	$\sin x = -0{,}5$
$x_1 = 0{,}848 \qquad x_2 = 2{,}293$	$x_T = -0{,}523 \qquad x_1 = 3{,}665 \qquad x_2 = 5{,}759$
	x_T ist der Wert des Taschenrechners, der nicht gesucht ist.

$\boxed{x_2 = \pi - x_1}$ $\boxed{x_1 = \pi - x_T}$ $\boxed{x_2 = 2\pi + x_T}$

Es wird von Nulldurchgang an gerechnet.

Kosinusfunktion



y – Wert ist **positiv**

cos x = 0,75

x_1 = 0,7227 x_2 = 5,560

$$\boxed{\mathbf{x_2 = 2\pi - x_1}}$$

y – Wert ist **negativ**

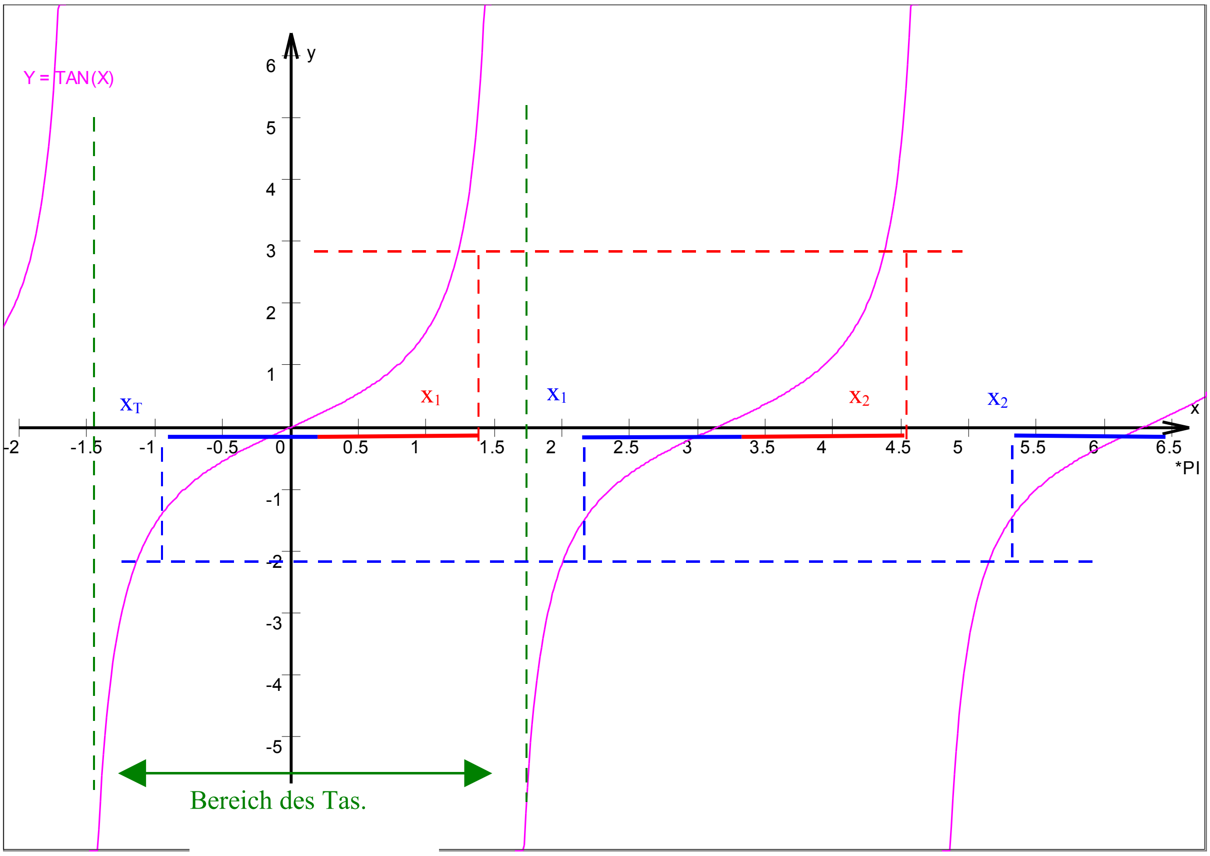
cos x = - 0,5

x_1 = 2,094 x_2 = 4,188

$$\boxed{\mathbf{x_2 = 2\pi - x_1}}$$

Es wird vom Scheitelpunkt an gerechnet.

Tangensfunktion



y - Wert ist **positiv**

$\tan x = 3$

$x_1 = 1{,}249 \qquad x_2 = 4{,}390$

y – Wert ist **negativ**

$\tan x = -2$

$x_T = -1{,}107 \qquad x_1 = 2{,}034 \qquad x_2 = 5{,}176$

x_T ist der Wert des Taschenrechners, der ist nicht gesucht.

$\boxed{\mathbf{x_2 = \pi + x_1}}$

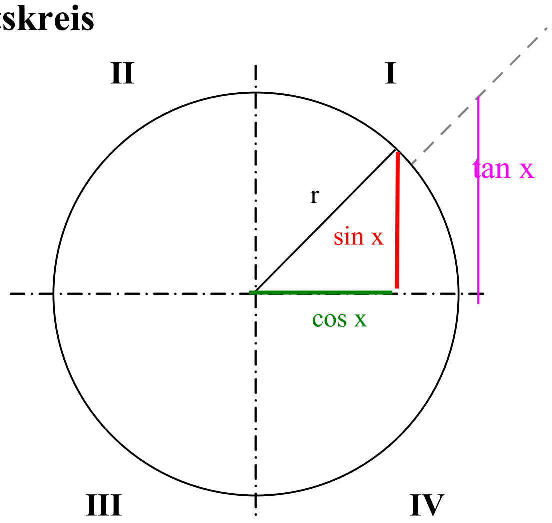
$\boxed{\mathbf{x_1 = \pi + x_T}}$ $\boxed{\mathbf{x_2 = 2\pi + x_T}}$

Es wird von den Nullstellen an gerechnet.

Winkelverhältnisse

Einheitskreis

Radius = 1



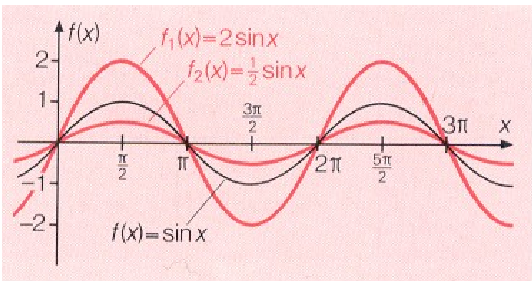
Tangens: $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$

Kotangens: $\cot = \dfrac{\cos x}{\sin x}$

Pythagoras: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

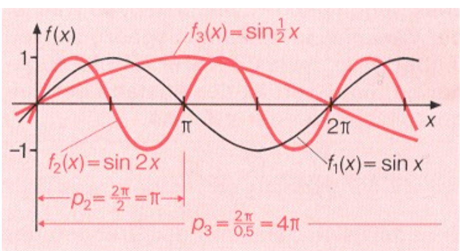
RAD: $x_{RAD} = \dfrac{\alpha_{Grad}}{180} \cdot \pi$

Amplituden Änderung:



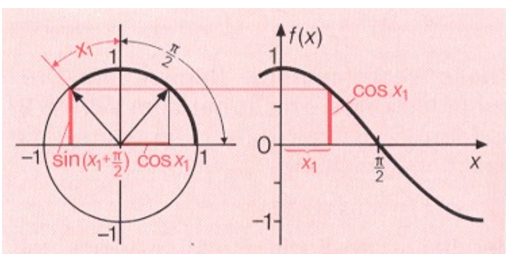
Wird eine Funktion, um einen konstanten Faktor multipliziert, verändert sich sein Wertebereich und somit seine Amplitude.

Perioden Änderung:



Wird der Winkel (x – Wert) mit einem Faktor erweitert, ändert sich die Periode. Und zwar um den Kehrwert des Faktors. Umso größer der Faktor, umso kleiner ist eine Periode.

Phasenverschiebung:

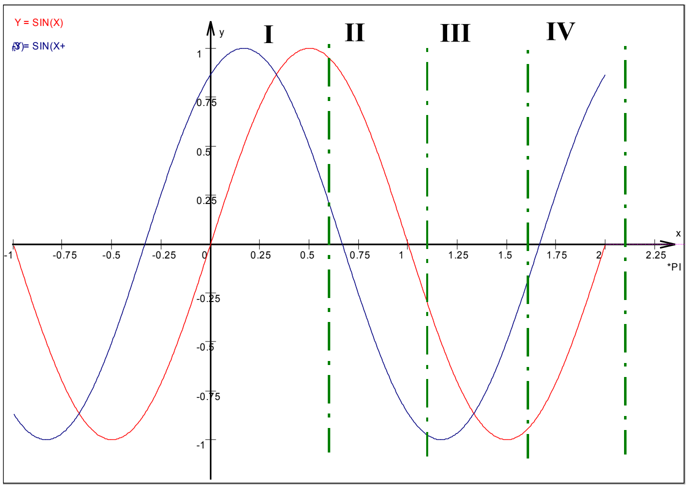


Die Kosinusfunktion, ist beim genaueren hinsehen, keine Eigenständige Funktion, sondern nur eine verschobene Sinusfunktion. Dies wird Phasenverschiebung genannt. Der Phasenverschiebungswinkel wird als Summand des x - Wertes angegeben.

$\sin(x + \dfrac{\pi}{2}) = \cos x$

Möglichkeiten der Phasenverschiebung:

a) $f_{(x)} = \sin(x + \frac{\pi}{3})$

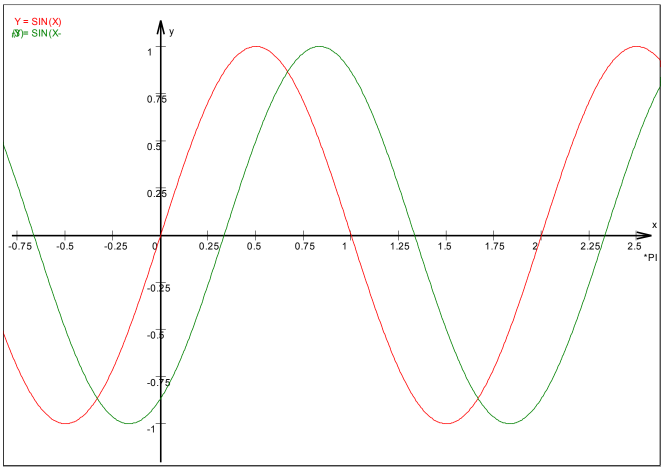


Der Summand und x ist positiv

Die Ursprüngliche Sinusfunktion, wird vom ihrem Startpunkt im Ursprung um den Summanten, nach links verschoben.

Die Phasenverschiebung beträgt $\frac{\pi}{3}$ oder 60°. Daraus folgt ein Kosinus φ von 0,5, der voreilt.

b) $f_{(x)} = \sin(x - \frac{\pi}{3})$

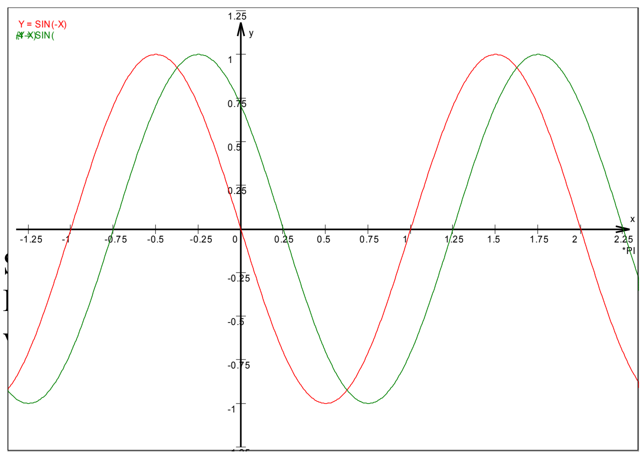


Der Summand ist negativ, und x ist positiv

Die Ursprüngliche Sinusfunktion, wird vom ihrem Startpunkt im Ursprung um den Summanten, nach rechts verschoben.

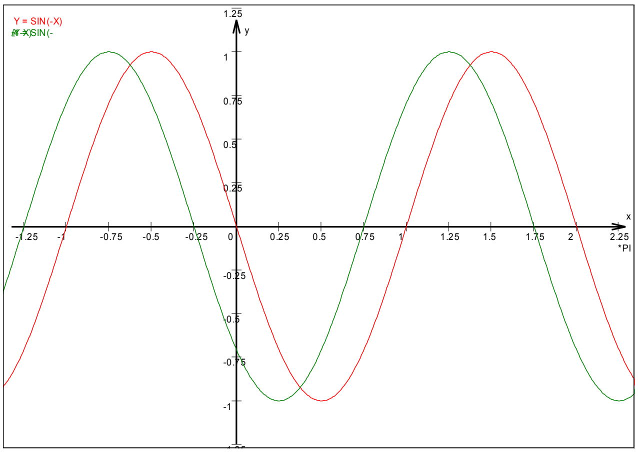
Die Phasenverschiebung beträgt $\frac{\pi}{3}$ oder 60°. Daraus folgt ein Kosinus φ von 0,5, der nacheilt

c) $f_{(x)} = \sin(\frac{\pi}{3} - x)$.



Der Summand ist positiv, und x ist negativ

Die Sinusfunktion von –x ist um 180° zur Ursprungsfunktion nach links verschoben. Durch die *d)* $f_{(x)} = \sin\left(-\frac{\pi}{3} - x\right)$

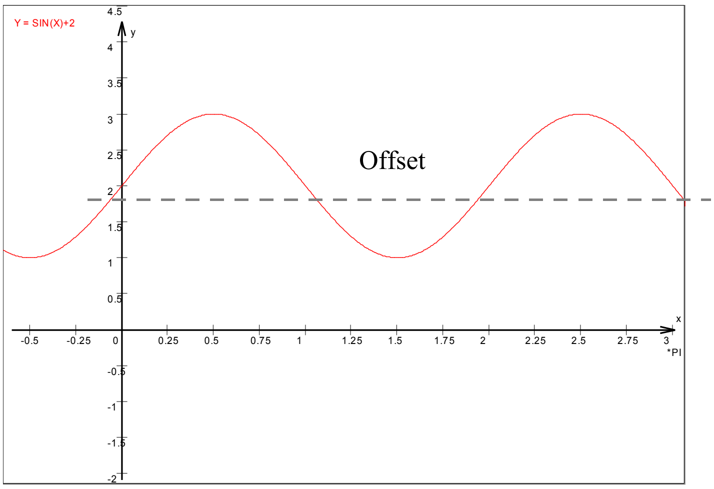


Der Summand und x sind negativ

Die Sinusfunktion von –x ist um 180° zur Ursprungsfunktion nach links verschoben. Durch die

Offset Änderung:

$f_{(x)} = \sin x + 2$



Wird einer Sinusfunktion ein Summand Addiert oder Subtrahiert

dann wird die Funktion um diesen Wert entweder nach oben (+) oder nach unten (-) verschoben.
Dies nennt man Offset.

Wichtige Umrechnungen

Die Sinus und die Kosinusfunktion, sind 2π – periodisch.

$\sin(-x) = -\sin(x)$ $\qquad$ $\cos(-x) = \cos(x)$

$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x)$ $\qquad$ $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x)$

$\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x)$ $\qquad$ $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\sin(x)$

$\sin(\pi + x) = -\sin(\pi - x) = -\sin(x)$ $\qquad$ $\cos(\pi - x) = -\cos(x)$

$\sin(\pi - x) = \sin(x)$ $\qquad$ $\cos(\pi + x) = \cos(\pi - x) = -\cos(x)$

$\sin(2\pi + x) = \sin(x)$ $\qquad$ $\cos(2\pi + x) = \cos(x)$

Merkblatt

RAD	$x_{RAD} = \frac{\alpha_{Grad}}{180} \cdot \pi$

Tangens	$\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$
Kotangens	$\cot = \dfrac{\cos x}{\sin x}$
Zusammenhang von sin und cos	$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

Umrechnungen und Additionstheoreme:

$\sin(-x) = -\sin(x)$

$\cos(-x) = \cos(x)$

$\sin(2x) = 2 \cdot \sin x \cdot \cos x$

$\cos(2x) = 2 \cdot \cos^2 x - 1$

$\sin^2 x = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2} \cdot \cos(2x)$

$\cos^2 x = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} \cdot \cos(2x)$

$\cos^2 x - \sin^2 x = \cos(2x)$

$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta$

$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta - \cos\alpha \cdot \sin\beta$

$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta$

$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta + \sin\alpha \cdot \sin\beta$

$\sin\alpha \cdot \cos\beta = \dfrac{\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)}{2}$

$\cos\alpha \cdot \cos\beta = \dfrac{\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)}{2}$

$\sin\alpha \cdot \sin\beta = \dfrac{\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta)}{2}$

Gesuchte Funktion	Vorgegebene Funktion: $\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\tan\alpha$	$\cot\alpha$
$\sin\alpha =$	$\sin\alpha$	$\sqrt{1-\cos^2\alpha}$	$\dfrac{\tan\alpha}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}$	$\dfrac{1}{\sqrt{1+\cot^2\alpha}}$
$\cos\alpha =$	$\sqrt{1-\sin^2\alpha}$	$\cos\alpha$	$\dfrac{1}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}$	$\dfrac{\cot\alpha}{\sqrt{1+\cot^2\alpha}}$
$\tan\alpha =$	$\dfrac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}$	$\dfrac{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha}$	$\tan\alpha$	$\dfrac{1}{\cot\alpha}$
$\cot\alpha =$	$\dfrac{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}{\sin\alpha}$	$\dfrac{\cos\alpha}{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}$	$\dfrac{1}{\tan\alpha}$	$\cot\alpha$

$\sin\alpha \pm \sin\beta = 2\sin\dfrac{\alpha \pm \beta}{2} \cdot \cos\dfrac{\alpha \mp \beta}{2}$

$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\dfrac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos\dfrac{\alpha - \beta}{2}$

$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\dfrac{\alpha + \beta}{2} \cdot \sin\dfrac{\alpha - \beta}{2}$

$\tan\alpha \pm \tan\beta = \dfrac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\cos\alpha \cdot \cos\beta}$

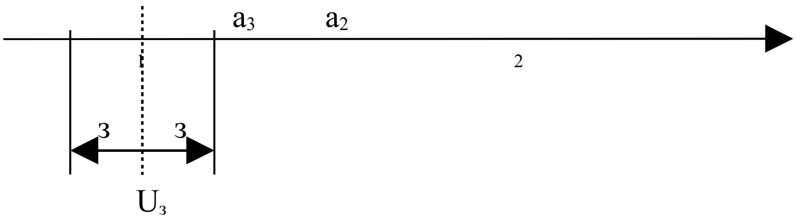
Grenzwerte

Eine Zahl g heißt Grenzwert einer Zahlenfolge, wenn *fast alle* (bis auf endlich viele Glieder) Glieder der Zahlenfolge in einer beliebig gewählten Umgebung U_ε liegen.

Eine solche Folge ist dann **konvergent**. (lat. convergere = zusammenlaufen)

Beispiel:

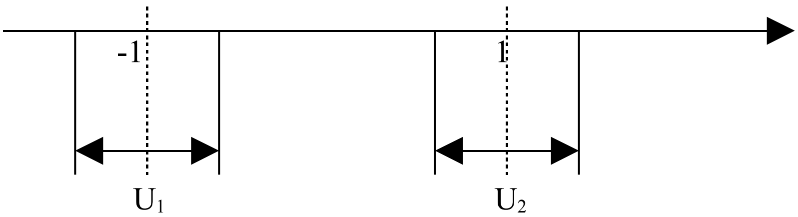
Die Folge $a_n = \frac{n+1}{n}$



Folgen, welche gegen mehrere „Grenzwerte" streben, sind nicht konvergent. Diese „Grenzwerte" werden **Häufungswerte** genannt.

Beispiel:

Die Folge: $a_n = (-1) + \frac{1}{n}$



Strebt eine Folge hingegen in das Unendliche, dann ist sie auch nicht konvergent und besitzt keine Häufungswerte.

Man unterteilt:

konvergent Folgen:	$a_n = \frac{n+1}{n}$	Nur einen Grenzwert ! (1)
Nullfolgen:	$a_n = \frac{1}{n}$	Mit dem Grenzwert 0 ! (Spezielle Nullfolge)
Unbestimmt divergent:	$a_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$	Mit Häufungswerten! (-1, 1)
Bestimmt divergent:	$a_n = n$	Gegen $\pm\infty$!

Wichtige Folgen und Reihen

Arithmetische

$$a_n = a_1 + (n-1)\cdot d \quad \Rightarrow \quad s_n = \tfrac{1}{2}\cdot n\cdot(a_1 + a_n) \qquad \textit{Sonderfall}: \; a_n = n \quad \Rightarrow \quad s_n = \tfrac{1}{2}\cdot n\cdot(1+n)$$

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{1}{2}\cdot n\cdot(1+n)$$

Quadratische

$$a_n = n^2 \quad \Rightarrow \quad s_n = \frac{1}{6}\cdot n\cdot(n+1)\cdot(2n+1)$$

Kubische

$$a_n = n^3 \quad \Rightarrow \quad s_n = \frac{1}{4}\cdot n^2\cdot(n+1)^2$$

Geometrische

$$a_n = a_1\cdot q^{(n-1)} \quad \Rightarrow \quad s_n = a_1\cdot\frac{1-q^n}{1-q}$$

Grenzwertsätze

$$\lim_{x\to x_o}(c\cdot f_{(x)}) = c\cdot(\lim_{x\to x_o} f_{(x)}) \qquad \textit{für } c\in R$$

$$\lim_{x\to x_o}\sqrt[n]{f_{(x)}} = \sqrt[n]{\lim_{x\to x_o} f_{(x)}}$$

$$\lim_{x\to x_o}(f_{(x)} \pm g_{(x)}) = \lim_{x\to x_o} f_{(x)} \pm \lim_{x\to x_o} g_{(x)}$$

$$\lim_{x\to x_o}\left[f_{(x)}\right]^n = \left(\lim_{x\to x_o} f_{(x)}\right)^n$$

$$\lim_{x\to x_o}(f_{(x)}\cdot g_{(x)}) = \left(\lim_{x\to x_o} f_{(x)} \cdot \lim_{x\to x_o} g_{(x)}\right)$$

$$\lim_{x\to x_o}(a\cdot f_{(x)}) = a\cdot(\lim_{x\to x_o} f_{(x)})$$

$$\lim_{x\to x_o}\left[\log_a f_{(x)}\right] = \log_a(\lim_{x\to x_o} f_{(x)})$$

$$\lim_{x\to x_o}\left(\frac{f_{(x)}}{g_{(x)}}\right) = \frac{\lim_{x\to x_o} f_{(x)}}{\lim_{x\to x_o} g_{(x)}}$$

Grenzwertregel von Bernouli und de L`Hospital

Für Grenzwerte, die auf einen unbestimmten Ausdruck der Form „ $\frac{0}{0}$ *oder* $\frac{\infty}{\infty}$ “ führen gilte die Bernoulli – de Hospital Regel:

$$\lim_{x\to x_o}\frac{f_{(x)}}{g_{(x)}} = \lim_{x\to x_o}\frac{f'_{(x)}}{g'_{(x)}}$$

Konvergenzkriterien von Reihen

1) Notwendiges Kriterium:

Die Folge muss eine Nullfolge sein!

2) Quotienten Kriterium:

$$\lim_{k \to \infty} \left| \frac{a_{(k+1)}}{a_k} \right| \quad \textit{für} \quad \begin{array}{l} 1 = \textit{scheiße} \\ \hline < 1 = \textit{absulut konvergent} \\ \hline > 1 = \textit{bestimmt divergent} \end{array}$$

3) Leibnitz Kriterium:

Sind bei alternierenden Reihen, die Beträge der Folgeglieder streng monoton fallend und eine Nullfolge, so ist die Reihe konvergent.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot a_n \quad \textit{gilt} \quad a_1 > a_2 > a_3 \; ..... > a_n \quad \textit{und} \quad a_n \; \textit{eine Nullfo} \lg e$$

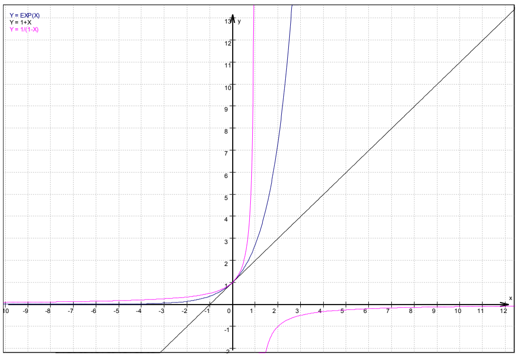
4) Majo – Minoranten Kriterium:

Bildet man eine **Majorante**, welche deren Folgeglieder stets vom **Betrag größer** sind, und deren Reihe konvergiert, folg daraus, dass die Ursprungsreihe **konvergiert**.
Bildet man eine **Minorante**, welche deren Folgeglieder stets vom **Betrag kleiner** sind, und deren Reihe divergiert, folg daraus, dass die Ursprungsreihe **divergiert.**

Konvergenzradius

$$r = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_n}{a_{(n+1)}} \right| \quad \textit{für} \sum a_n \cdot x^n \quad \textit{gilt}: \begin{array}{l} |x| < r \;\; \textit{konvergiert} \\ \hline |x| > \textit{divergiert} \\ \hline |x| = r \;\; \textit{noch unbestimmt} \end{array}$$

Expotential und Logarithmusfunktionen



$$e^x = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \qquad \textit{eine Annäherung}: \; 1 + x \leq e^x \leq \frac{1}{1-x}$$

Rechenregeln:

Es gilt für: $a > 0\ ;\ b > 0\ ;\ b \neq 1$

Bedeutung:

$b^n = a \quad \Leftrightarrow \quad n = \log_b a \qquad | \qquad b^{\log_b a} = a \qquad | \qquad \log_b (b^n) = n$

Allgemein:

$\log_b (a \cdot c) = \log_b a + \log_b c \qquad | \qquad \log_b (a^n) = n \cdot \log_b a \qquad | \qquad \log_b (\frac{a}{c}) = \log_b a - \log_b c$

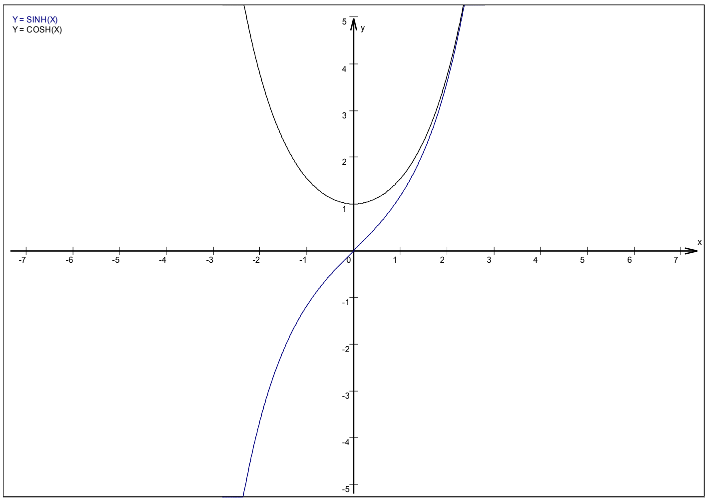
Wichtig:

$\log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b} \quad c \neq 1 \quad \Rightarrow \quad \lg 6 = \frac{\ln 6}{\ln 10} \qquad | \qquad a^x = e^{x \cdot \ln a}$

Hyperbelfunktionen

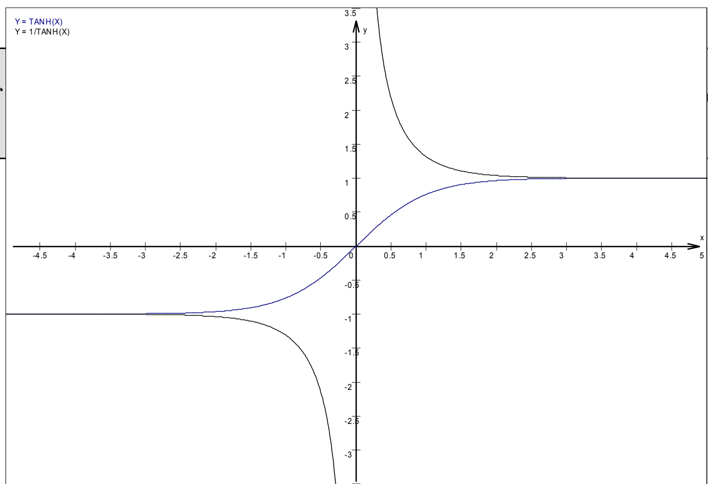
Sinus und Kosinus hyperbolicus

$\sinh(x) = \frac{1}{2} \cdot (e^x - e^{-x}) \qquad f: R \to R \qquad | \qquad \cosh(x) = \frac{1}{2} \cdot (e^x + e^{-x}) \qquad f: R \to [1;\infty[$



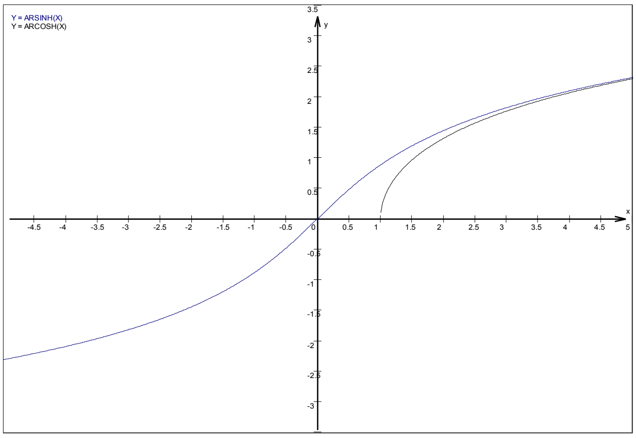
Tangens und Kotangens hyperbolicus

$\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} \qquad f$ … $f: R/\{0\} \to R/]-1;1[$



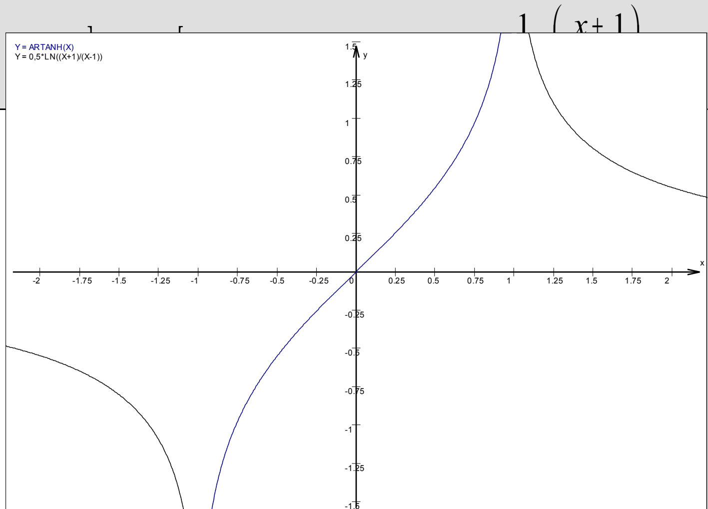
Areasinus und Areacosinus hyperbolicus

$$ar\sinh(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1} \qquad f: R \to R \quad | \qquad ar\cosh(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1} \qquad f: [1;\infty[\;\to\; [0;\infty[$$



Areatangens und Areakotangens hyperbolicus

$$ar\tan gh(x) = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \qquad f: R/[-1;1] \to R/\{0\}$$



Rechenregeln für Hyperbelfunktionen

$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$ $\sinh(2x) = 2 \cdot \sinh(x) \cdot \cosh(x)$

$\sinh(\alpha \pm \beta) = \sinh(\alpha) \cdot \cosh(\beta) \pm \cosh(\alpha) \cdot \sinh(\beta)$

$\cosh(\alpha \pm \beta) = \cosh(\alpha) \cdot (\beta) \pm \sinh(\alpha) \cdot \sinh(\beta)$

$\cosh(2x) = 2 \cdot \cosh^2(x) - 1$

Analytische Geometrie

Siehe Vorkurs Mathematik !!!

Stetigkeit

Wenn eine Funktion Ableitbar und sie an der Stelle x_0 Definiert ist, so ist die Funktion Stetig in x_0.
Die Funktion, welche bei einer Operation zweier stetiger Funktionen entsteht, ist stetig.
Als Faustregel kann man sagen, dass eine Funktion stetig ist, wenn man diese zeichnen kann ohne den Stift abzusetzen.

Es muss gelten:

$$\boxed{\underset{\text{"}links\text{"}}{\lim_{x \to x_0^-}} = f(x_0) = \underset{\text{"}rechts\text{"}}{\lim_{x \to x_0^+}}}$$

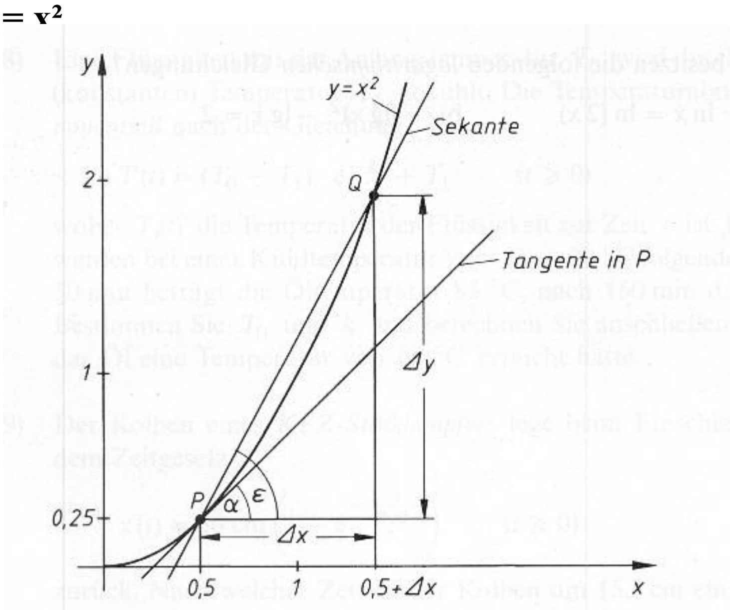
Tipp: Bei Betragsfunktionen mit (x + h) und (x – h)

Differentialrechnung

Mit Hilfe der Differentialrechnung, kann das Tangentenproblem gelöst werden.
Der Ausgangspunkt der Betrachtung ist die Normalparabel mit der Funktionsgleichung
$\mathbf{f_{(x)} = x^2}$. Um die Steigung der Tangente an der Stelle x = 0,5 d.h. im Kurvenpunkt
P (0,5 ; 0,25) zu bestimmen, muss schrittweise vorgegangen werden.

1) In der Umgebung von P wird ein weiterer, von P verschiedener Parabelpunkt Q ausgewählt.
$Q = ((0{,}5 + \Delta x) ; (0{,}5 + \Delta x)^2)$ Die Abszissendifferenz ist Δx.

$\mathbf{f_{(x)} = x^2}$



Die durch P und Q verlaufende Sekante besitzt die Steigung:

$$m_s = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_Q - y_P}{x_Q - x_P} = \frac{(0{,}5 + \Delta x)^2 - 0{,}25}{0{,}5 + \Delta x - 0{,}5} = \frac{0{,}25 + \Delta x + \Delta x^2 - 0{,}25}{\Delta x} = 1 + \Delta x$$

2 Nun wird der Punkt Q gegen den Punkt P laufen gelassen. Bei dem Grenzübergang, also wenn Δx geht gegen 0, wird aus der Sekantensteigung, die gesuchte Steigung im Punkt P.

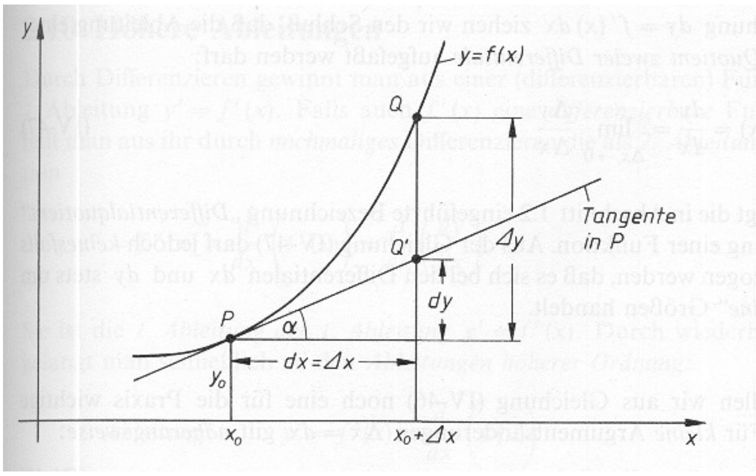
$$m_P = \lim_{\Delta x \to 0} m_S = \lim_{\Delta x \to 0} (1 + \Delta x) = 1$$

Daraus folgt:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x \to 0} \frac{f_{(x_0 + \Delta x)} - f_{(x_0)}}{\Delta x} = \frac{dy}{dx} = f'_{(x)}$$

Differrenzenquotient *Differentialquotient*

Differential einer Funktion



Das Differential
einer Funktion beschreibt den Zuwachs der Ordinante auf der Stelle x_0 errichteten Kurventangente bei einer Änderung der Abszisse x um dx.

$$dy = df = f'_{(x_0)} \cdot dx$$

Ableitungsregeln

Faktorregel

Faktorregel

Ein konstanter Faktor k bleibt beim Differenzieren erhalten, hingegen eine Offset Konstante C verloren geht:

$$f_{(x)} = k \cdot g_{(x)} + C \qquad \Rightarrow \qquad f'_{(x)} = k \cdot g'_{(x)}$$

Summenregel

Summenregel

Bei einer endlichen Summe von Funktionen darf gliedweise differenziert werden:

$$f_{(x)} = f_{1(x)} + f_{2(x)} + \ldots\ldots f_{n(x)} \qquad \Rightarrow \qquad f'_{(x)} = f'_{1(x)} + f'_{2(x)} + \ldots\ldots f'_{n(x)}$$

Produktregel

Produktregel

Die Ableitung einer in der Produktform stehenden Funktion ist:

$$f_{(x)} = u_{(x)} \cdot v_{(x)} \qquad \Rightarrow \qquad f'_{(x)} = u'_{(x)} \cdot v_{(x)} + u_{(x)} \cdot v'_{(x)}$$

Quotientenregel

Quotientenregel

Die Ableitung einer Funktion, welch ein Quotient zweier Funktionen ist:

$$f_{(x)} = \frac{u_{(x)}}{v_{(x)}} \qquad \Rightarrow \qquad f'_{(x)} = \frac{u'_{(x)} \cdot v_{(x)} - u_{(x)} \cdot v'_{(x)}}{(v_{(x)})^2}$$

Kettenregel

Kettenregel

Die Ableitung einer verketteten Funktion erhält man:

„Inner mal äußere Ableitung !“

Logarithmusregel

Logarithmusregel

Steht das Argument als Exponent einer Funktion, so muss die Gleichung

A) mit den Natürlichenlogarithmus logarithmiert werden,

B) auf beiden Seiten abgelitten werden,

C) **und dann nach $f'_{(x)}$ umgestellt werden.**

Umkehrfunktionsregel

Umkehrfunktionsregel

Kann immer angewandt werden, wenn man die Ableitung der Umkehrfunktion kennt:

$$f_{(x)} = u_{(x)} = y \quad \Rightarrow \quad x = u^{-1}_{(x)}(y) = g_{(y)}$$

$$f'_{(x)} = \frac{1}{g'_{(y)}} = \frac{1}{g'_{(u_{(x)})}}$$

Implizit Regel

Implizit Regel

liegt eine Funktion in Impliziter Form vor, kann eine Ableitung auch ohne die Explizite Darstellung gewonnen werden.

1. **Nach den oben genannten Regeln Ableiten**

$$e^y - x = 0 \quad \Rightarrow \quad e^y \cdot y' - 1 = 0$$

2. **Nach y' Umstellen.**

$$y' = \frac{1}{e^y}$$

3. **Je nach Aufgabe, Punkt einsetzen oder in x Umwandeln.**

$$x = e^y \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{1}{x}$$

Auf Differenzierbarkeit Prüfen

Eine Funktion kann an einer Stelle x_0 **nicht** abgeleitet werden, wenn gilt:

A x_0 ist nicht im Definitionsbereich der Funktion und ihrer Ableitung.

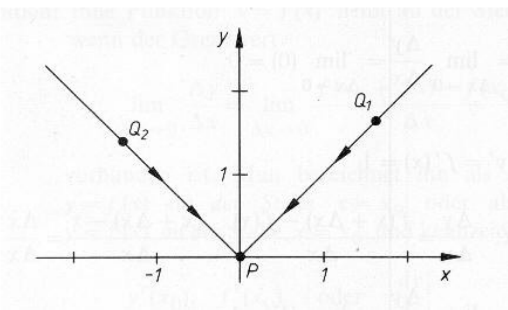
B Die Funktion ist in x_0 unstetig.

C Der **Linksseite** und **Rechtsseitige** Ableitungsgrenzwert für x_0 sind verschieden.

$$\lim_{\Delta x \to 0^-} f'_{(x_0)} \neq \lim_{\Delta x \to 0^+} f'_{(x_0)}$$

Beispiel:

$$y = f(x) = |x| = \begin{cases} x & \text{für } x \geqslant 0 \\ -x & \text{für } x < 0 \end{cases}$$



Rechtsseitige Ableitung ($Q_1 \longrightarrow P$):

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(0+\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x - 0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (1) = 1$$

Linksseitige Ableitung ($Q_2 \longrightarrow P$):

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(0+\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-\Delta x - 0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (-1) = -1$$

Ableitungen der elementaren Funktionen

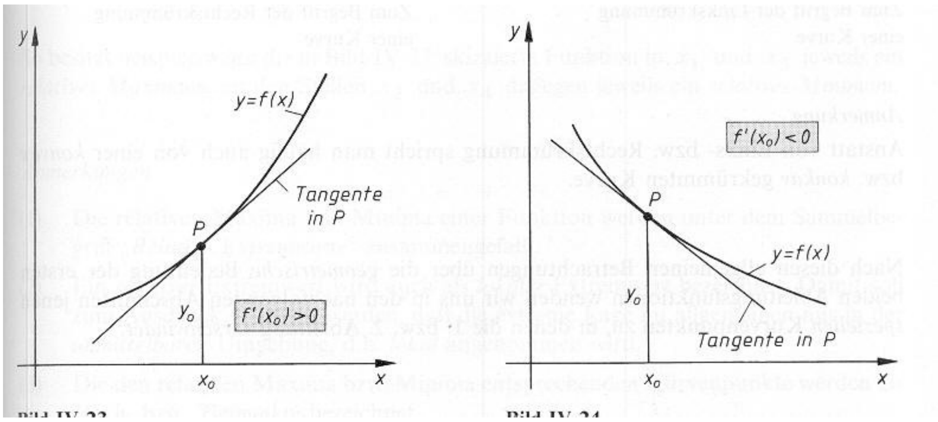
Funktion $f_{(x)}$ **Ableitung**

Potenzfunktion	x^n	$n \cdot x^{n-1}$
Trigonometrische Funktionen	$\sin(x)$	$\cos(x)$
	$\cos(x)$	$-\sin(x)$
	$\tan(x)$	$\frac{1}{\cos^2(x)}$
	$\cot(x)$	$-\frac{1}{\sin^2(x)}$
Arkusfunktionen	$\arcsin(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
	$\arccos(x)$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
	$\arctan(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$
	$arc\cot(x)$	$-\frac{1}{1+x^2}$
Exponentialfunktionen	e^x	e^x
	a^x	$(\ln a) \cdot a^x$
Logarithmusfunktionen	$\ln x$	$\frac{1}{x}$
	$\log_a x$	$\frac{1}{(\ln a) \cdot x}$
Hyperbelfunktionen	$\sinh(x)$	$\cosh(x)$
	$\cosh(x)$	$\sinh(x)$
	$\tanh(x)$	$\frac{1}{\cosh^2(x)}$
	$\coth(x)$	$-\frac{1}{\sinh^2(x)}$
Areafunktionen	$ar\sinh(x)$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
	$ar\cosh(x)$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
	$ar\tanh(x)$	$\frac{1}{1-x^2}$
	$ar\coth(x)$	$\frac{1}{1-x^2}$

Geometrische Deutung einer Ableitung

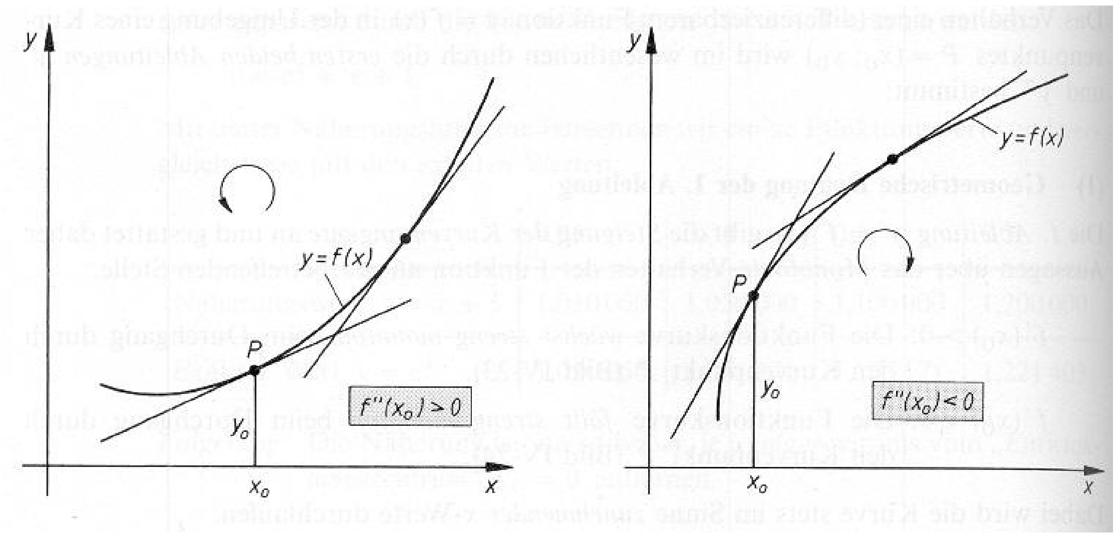
Die erste Ableitung

Sie gibt die Steigung der Kurventangente an und gestattet daher Aussagen über das **Monotonie – verhalten** der Funktion:



Die zweite Ableitung

Sie ist die Ableitungsfunktion der ersten Ableitung. Sie beschreibt das **Krümmungsverhalten** der Funktionskurve:



Linkskrümmung = konvex **Rechtskrümmung = konkav**

Anwendungen

Kurvendiskussion

Dieses Anwendungsgebiet sehr groß. Je nach dem was man wissen will kann man durch gezielte Teilanwendung ein Ergebnis erlangen. Ob Extremwertaufgaben, Stetigkeit Prüfung, oder Findung von Besonderen Punkten.

Schematische Abfolge

A Definitionsbereich festlegen

B Prüfung auf Symmetrie und Periodizität

C Nullstellen bestimmen

D Auf Stetigkeit prüfen (Tipp: erst Ableiten)

E Ableiten

F Findung von Kritischen stellen

G Bestimmung von Polen , Lücken , Asympthoden, Grenzwertverhalten gegen ∞

H Skizze

I Monotonie und Krümmungsverhalten bestimmen, auf Stetigkeit prüfen

Kritische Stellen

Lokale Extremwerte

Kritische Stellen bezüglich Extremwerte liegen vor, wenn die erste Ableitung 0 ist und bei einem geschlossenen Intervall die Intervallgrenzen. Zu dem müssen auch die Stellen genauer untersucht werden, deren Zähler null wird (Nenner auch).

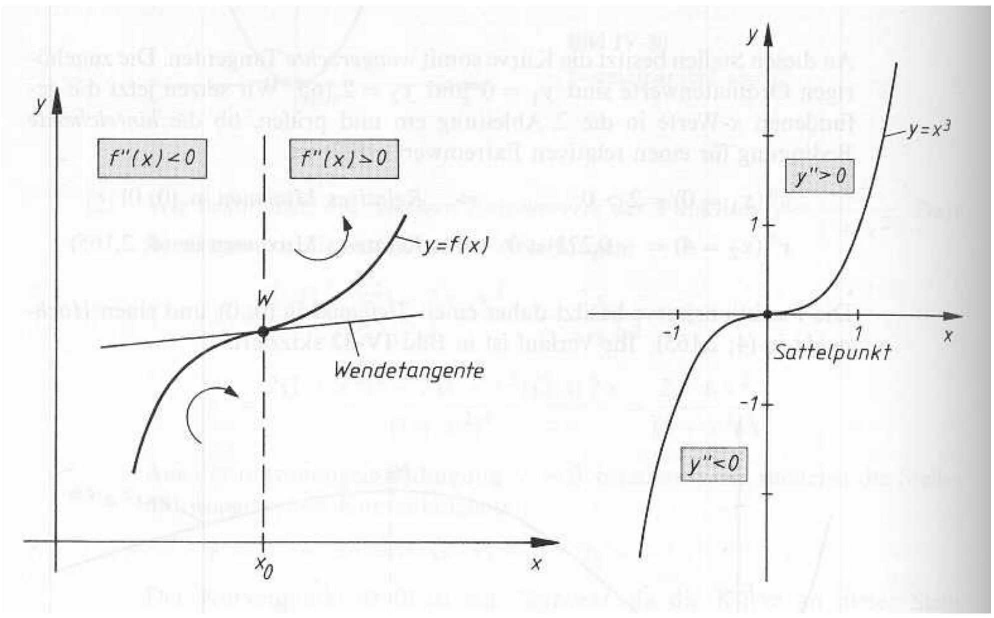
min bei $f^{n}_{(x)} > 0$ oder $f'_{(x-h)} < 0$ und $f'_{(x+h)} > 0$

max bei $f^{n}_{(x)} < 0$ oder $f'_{(x-h)} > 0$ und $f'_{(x+h)} < 0$

Dies gilt für Ableitungen gerader n. Ordnung. Für Ableitungen ungerader n. Ordnung ist dies ein Sattelpunkt.

Wendepunkte

Kurvenpunkte, in denen sich der Drehsinn der Tangente ändert, heißen Wendepunkte. Wendepunkte mit waagerechter Tangente werden als Sattelpunkte bezeichnet.



Eine Funktion besitzt an der Stelle x_0 einen Wendepunkt, wenn dort die Bedingung

$f''_{(x_0)} = 0$ *und* [$f'''_{(x_0)} \neq 0$ *oder* $f''_{(x_0 - h)}$ *Vorzeichenwechsel* $f''_{(x_0 + h)}$]

erfüllt sind.

Tangentenverfahren von Newton

Herleitung

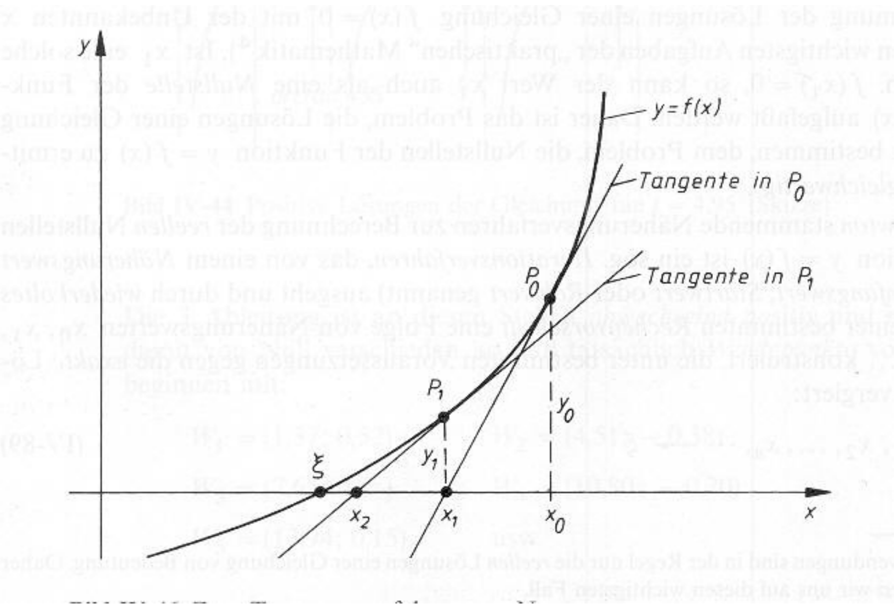
Das Newtonsche Tangentenverfahren geht von den folgenden Überlegungen aus:

Ist x_0 irgendein geeigneter Näherungswert für die (unbekannt) Nullstelle ξ einer Funktion, wird die Beziehung zwischen Ableitungsfunktion und der im Kurvenpunkt $P_0 = (x_0 ; y_0)$ vorliegenden Tangentensteigung hergestellt:

$$m_{T_{P0}} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_{S1} - y_0}{x_{S1} - x_0} = f'_{(x_0)} \qquad (y_0 = f_{(x_0)})$$

S_1 = *Schnittpunkt der Tangente mit der x - Achse*

$x_{S1} = x_{P1} \quad ; \quad y_{S1} = 0$



Wird nun in die Gleichung für y_{S1} null eingesetzt und nach x_1 umgestellt, erhält man eine erste Annäherung, an die Nullstelle. Wird dieser Dieser Vorgang, kann nun zur beliebig genauen Bestimmung Nullstelle fortgesetzt werden.

Newtons Tangenteniterationsvorschrift lautet:

$$x_n = x_{(n-1)} - \frac{f_{(x_n - 1)}}{f'_{(x_n - 1)}}$$

Anwendbarkeit des Newtonverfahrens

Konvergenzkriterium

Die Konvergenz der nach dem Newtonschen Tangentenverfahren konstruierten Folge von Näherungswerten gegen die exakte Lösung ξ ist im geschlossenen Intervall und dem alle Näherungswerte liegen gewährleistet, wenn gilt:

$$\left| \frac{f_{(x)} \cdot f''_{(x)}}{\left(f'_{(x)}\right)^2} \right| < 1 \qquad (\textit{hinreichende Konvergenzbedingung})$$

Ungeeignete Startwerte

Völlig ungeeignet sind Startwerte, in deren unmittelbarer Ungebung die Kurventangente nahezu parallel zur x – Achse verläuft. In solchen Punkten ist nämlich die Ableitung nur wenig von Null verschieden: Der Schnittpunkt zwischen der nur schwach geneigten Kurventangente und der x – Achse liegt daher meist in großer Entfernung vom Startwert. Die Folge der Näherungswerte konvergiert daher in diesem Fall im Allgemeinen nicht gegen die gesucht Lösung.

Potenzreihen

Taylorsche Reihe

Je nach gebrauch, kann mit Hilfe von Taylor eine Potenzreihe aus einer beliebigen Funktion ermittelt werden. Wird ein Polynom vom höchstgrad n, n mal entwickelt, so erhält man wieder das Polynom.

$$f_{(x)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}_{(x_0)}}{n!} \cdot (x - x_0)^n \qquad x = \text{"}\textit{freies Argument}\text{"}$$

$$n = \textit{Grad der Annäherung, also Ableitung}$$

$$x_0 = \textit{Entwicklungszentrum}$$

Restgliedbetrachtung

Da diese Polynome nur Annäherungen sind, interessiert der Fehler welcher gemacht wird.

Taylorsche Formel

$$\boxed{f_{(x)} = f_{n(x)} + R_{n(x)}}$$

Das Restglied kann auf verschiedene Arten berechnet werden, (dazu bitte die Downloads betrachten)
Ein einfaches, auf Abschätzung beruhendes Verfahren, ist das **Lagrange** Verfahren.
Man bedenkt aber immer:

Ist das Restglied nicht genügend klein,
so wird die Näherung scheiße sein !!!

Restglied nach Lagrange

$$R_{n(x)} = \frac{f^{(n+1)}_{(\xi)}}{(n+1)!} \cdot (x - x_0)^{(n+1)} \qquad | \quad (x_0 < \xi < x)$$

Beispiel:

Restglied für $f_{(1)} = e^x$ nach Lagrange für den Entwicklungspunkt gleich Null :

$$R_{n(1)} = \frac{e^{\xi \cdot x}}{(n+1)!} \cdot 1^{(n+1)}$$

$$\text{es gilt wegen:} \qquad (x_0 < \xi < x)$$

$$(0 < \xi < 1)$$

Es wird eine Abschätzung gemacht, das $e^1 < 3$.

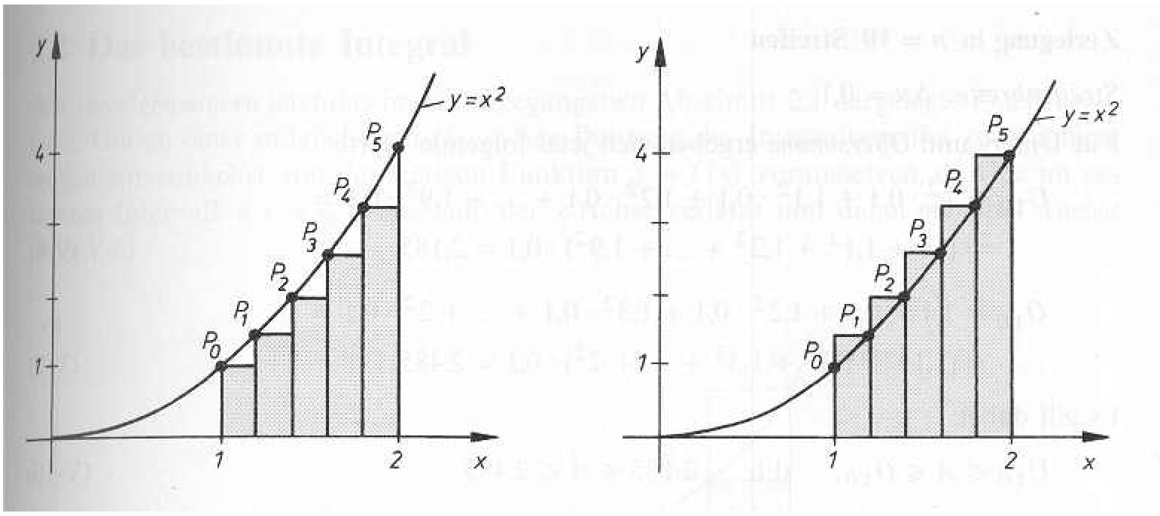
$$R_{n(1)} < \frac{3}{(n+1)!}$$

Es folgt, dass die Eulerische Zahl beliebieg genau bestimmbar ist.

Integralrechnung

Das bestimmte Integral

Die Integralrechnung beschäftigt sich mit dem Problem, die Fläche zu bestimmen, welche sich zwischen dem Funktionsgraphen und der Abszisse bildet.
Sie kann aufgefasst werden, als die Summe unendlich vieler Teilstreifen.
Deswegen, kann man nur über geschlossene Intervalle Integrieren.
Die Summe der Streifen welche einen größeren Flächeninhalt haben, als der exakte Streifen, nennt man **Obersumme**.
Die Summe der Streifen hingegen, welche einen kleineren Flächeninhalt haben, nennt man **Untersumme**.



Die exakte Fläche liegt zwischen der Ober und der Untersumme.

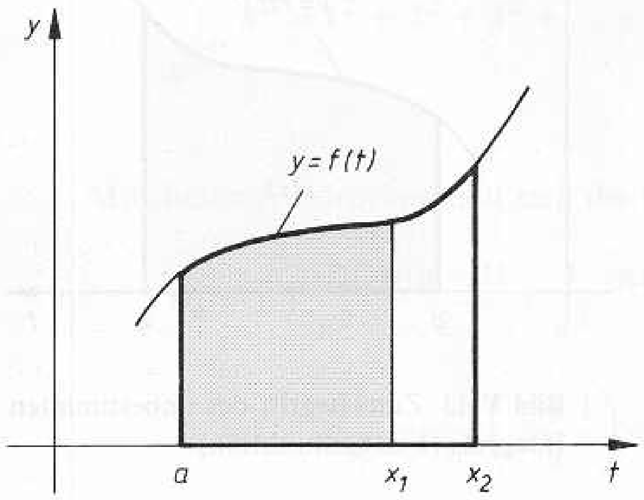
$$U \leq I_{(x)} \leq O$$

Der gemeinsame Grenzübergang der Ober und Untersummen wird das **bestimmte Integral** genannt. Welches sich zwischen den Grenzen a = Untergrenze und b = Obergrenze befindet.

$$I_{(x)} = A = \lim_{n \to \infty} U = \lim_{n \to \infty} O = \int_a^b f_{(x)} \cdot dx$$

Das unbestimmte Integral

Das unbestimmte Integral beschreibt den Flächeninhalt als Flächenfunktion in Abhängigkeit der Obergrenze.



Grau unterlegte Fläche:

$$I(x_1) = \int_a^{x_1} f(t)\,dt$$

Stark umrandete Fläche:

$$I(x_2) = \int_a^{x_2} f(t)\,dt$$

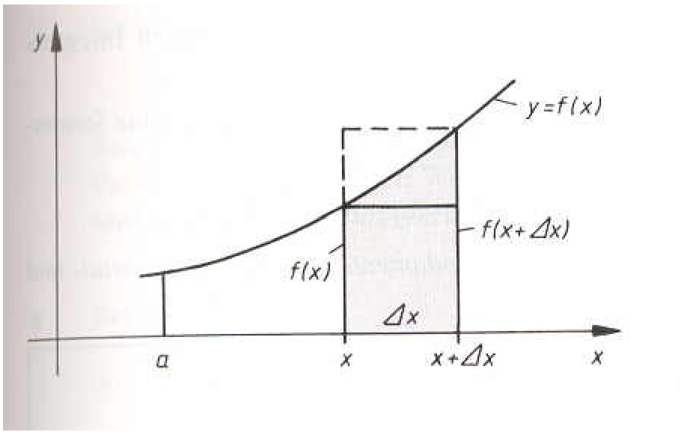
Das unbestimmte Integral als Funktion der oberen Integrationsgrenze

Das unbestimmte Integral als Flächenfunktion

$$I_{(x)} = \int_a^x f_{(t)}\,dt$$

Fundamentalsatz der Differential und Integralrechnung

Wird die obere Grenze x im unbestimmten Integral $I_{(x)} = \int_a^x f_{(x)}\, dx$ um Δx vergrößert, so wächst



der Flächeninhalt um:

$\Delta I = I(x + \Delta x) - I_{(x)}$

Dieser Flächenzuwachs liegt zwischen den Rechteckflächen von $f_{(x)}\,\Delta x$ und $f_{(x+\Delta x)}\Delta x$. Es besteht also zwischen den drei Flächen eine Beziehung:

$$f_{(x)} \cdot \Delta x \le \Delta I \le f_{(x+\Delta x)} \cdot \Delta x$$

Nach Division durch Δx wird daraus :

$$f_{(x)} \le \frac{\Delta I}{\Delta x} \le f_{(x+\Delta x)}$$

Beim Grenzübergang $\Delta x \to 0$

$$\lim_{\Delta x \to 0} f_{(x)} \le \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta I}{\Delta x} \le \lim_{\Delta x \to 0} f_{(x+\Delta x)}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta I}{\Delta x} = I'_{(x)}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} f_{(x)} = \lim_{\Delta x \to 0} f_{(x+\Delta x)} = f_{(x)}$$

$$f_{(x)} \le I'_{(x)} \le f_{(x)} \quad \Rightarrow \quad I'_{(x)} = f_{(x)}$$

Der in der Mitte eingeschlossene Grenzwert ist dabei definitionsgemäß die 1. Ableitung $I`_{(x)}$ der Flächenfunktion $I_{(x)}$, während die beiden äußeren Grenzwerte wegen der vorrausgesetzten Stetigkeit von
$f_{(x)}$ jeweils den Funktionswert $f_{(x)}$ ergeben:

Fundamentalsatz der Differential und Integralrechnung

Jedes unbestimmte Integral $I_{(x)} = \int_a^x f_{(x)}\, dx$ ist eine Stammfunktion zu $f_{(x)}$:

$$I_{(x)} = \int_a^x f_{(x)}\, dx \quad \Rightarrow \quad I'_{(x)} = f_{(x)}$$

Berechnung bestimmter Integrale mit Hilfe der Stammfunktion

Aus dem Fundamentalsatz geht hervor, dass man das unbestimmte Integral auch durch eine Stammfunktion des Integranden schreiben kann. Die Konstante C ist wählbar, da sie beim Ableiten verschwindet.

$$I_{(x)} = \int_a^x f_{(x)}\,dx = F_{(x)} + C$$

$$I_{(a)} = \int_a^a f_{(x)}\,dx = F_{(a)} + C = 0 \qquad \Rightarrow \qquad C = -F_{(a)}$$

$$\Rightarrow \quad I_{(x)} = \int_a^x f_{(x)}\,dx = F_{(x)} - F_{(a)}$$

Für ein bestimmtes Integral gilt :

$$I_{(x)} = \int_a^b f_{(x)}\,dx = F_{(b)} - F_{(a)}$$

Berechnung eines bestimmten Integrals

$$I_{(x)} = \int_a^b f_{(x)}\,dx = \left[F_{(x)}\right]_a^b = F_{(b)} - F_{(a)}$$

Stammintegrale

Winkelfunktionen

$$\int \sin(x)\,dx = -\cos(x) + C$$

$$\int \sin^2(x)\,dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin(2x)}{4} + C$$

$$\int \frac{1}{\sin^2(x)}\,dx = -\cot(x) + C$$

$$\int \cos(x)\,dx = \sin(x) + C$$

$$\int \cos^2(x)\,dx = \frac{\sin(x)\cdot\cos(x) + x}{2} + C$$

$$\int \frac{1}{\cos^2(x)}\,dx = \tan(x) + C$$

$$\int \tan(x)\,dx = -\ln\left|\cos(x)\right| + C$$

$$\int \tan^2(x)\,dx = \tan(x) - x + C$$

$$\int \cot(x)\,dx = \ln\left|\sin(x)\right| + C$$

$$\int \arcsin(x)\,dx = x\cdot\arcsin(x) + \sqrt{1-x^2} + C$$

$$\int \arccos(x)\,dx = x\cdot\arccos(x) - \sqrt{1-x^2} + C$$

$$\int \arctan(x)\,dx = x\cdot\arctan(x) - \frac{1}{2}\cdot\ln(1+x^2) + C$$

$$\int arc\cot(x)\,dx = x\cdot arc\cot(x) + \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C$$

Hyperbelfunktionen

$$\int \sinh(x)\,dx = \cosh(x) + C$$

$$\int \frac{1}{\sinh^2(x)}\,dx = -\coth(x) + C$$

$$\int \cosh(x)\,dx = \sinh(x) + C$$

$$\int \frac{1}{\cosh^2(x)}\,dx = \tanh(x) + C$$

$$\int \tanh(x)\,dx = \ln(\cosh(x)) + C$$

$$\int \coth(x)\,dx = \ln\left|\sinh(x)\right| + C$$

Exponentialfunktionen

$$\int e^x \, dx = e^x + C$$

$$\int \ln x \, dx = x \cdot \ln(x) - x$$

$$\int a^x \, dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

Allgemeine Funktionen

$$\int dx = x + C$$

$$\int x^n \, dx = \frac{1}{n+1} \cdot x^{n+1} + C$$

$$\int (ax+b)^n \, dx = \begin{cases} \dfrac{(ax+b)^{n+1}}{a(n+1)} & \text{für } n \neq -1 \\ \dfrac{\ln|ax+b|}{a} & n = -1 \end{cases}$$

$$\int \frac{1}{(a^2+x^2)} \, dx = \frac{1}{a} \arctan\left(\frac{x}{a}\right) + C$$

$$\int \frac{1}{(a^2-x^2)} \, dx = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + C$$

$$\int \frac{1}{x} \, dx = \ln|x| + C$$

$$\int \frac{1}{1-x^2} \, dx = \begin{cases} ar\tanh(x) + C & \text{für } |x| < 1 \\ ar\coth(x) + C & |x| > 1 \end{cases}$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} \, dx = \arctan(x) + C$$

$$\int \frac{1}{x^2-1} \, dx = \frac{1}{2} \cdot \ln \frac{x-1}{x+1} + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \, dx = ar\sinh(x) + C = \ln\left|x + \sqrt{x^2+1}\right| + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \, dx = ar\cosh(x) + C = \ln\left|x + \sqrt{x^2-1}\right| + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = \begin{cases} \arcsin(x) + C \\ -\arccos(x) + C \end{cases}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 + x^2}}\, dx = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + a^2}\right) + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}\, dx = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right)$$

$$\int \sqrt{a^2 + x^2}\, dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 + a^2} + \frac{a^2}{2}\ln\left|x + \sqrt{x^2 + a^2}\right| + C$$

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + C$$

Elementare Integrationsregeln

Faktorregel

Faktorregel

Ein konstanter Faktor darf vor das Integral gezogen werden:

$$\int_a^b C \cdot f_{(x)}\, dx = C \cdot \int_a^b f_{(x)}\, dx \qquad C: konstante$$

Summenregel

Summenregel

Eine endliche Summe von Funktionen darf gliedweise integriert werden:

$$\int_a^b (f_{1(x)} + ... + f_{n(x)})\,dx = \int_a^b f_{1(x)}\, dx + ...+ \int_a^b f_{n(x)}\, dx$$

Vertauschungsregel

Vertauschungsregel

Das Vertauschen der beiden Integrationsgrenzen bewirkt einen Vorzeichenwechsel des Integrals:

$$\int_a^b f_{(x)}\, dx = -\int_b^a f_{(x)}\, dx$$

Nullintegralsregel

Nullintegralsregel

Fallen die Integrationsgrenzen zusammen, so ist der Integralwert gleich Null:

$$\int_a^a f_{(x)}\ dx = 0$$

Intervallzerlegungsregel

Intervallzerlegungsregel

Für jede Stelle c aus dem Integrationsintervall $a \le x \le b$ gilt:

$$\int_a^b f_{(x)}\ dx = \int_a^c f_{(x)}\ dx + \int_c^b f_{(x)}\ dx$$

Integrationsmethoden

Substitution

Durch gezielte Substitution soll versucht werden das Integral zu vereinfachen.

Integraltyp	Substitution	Lösung	Beispiele	Substitution
(A) $\int f(ax+b)\,dx$	$u = ax+b$ $dx = \frac{du}{a}$		1. $\int (2x-3)^6\,dx$	$u = 2x-3$
			2. $\int \sqrt{4x+5}\,dx$	$u = 4x+5$
			3. $\int e^{4x+2}\,dx$	$u = 4x+2$
(B) $\int f(x)\cdot f'(x)\,dx$	$u = f(x)$ $dx = \frac{du}{f'(x)}$	$\frac{1}{2}f^2(x)+C$	1. $\int \sin x \cdot \cos x\,dx$	$u = \sin x$
			2. $\int \frac{\ln x}{x}\,dx$	$u = \ln x$
(C) $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx$	$u = f(x)$ $dx = \frac{du}{f'(x)}$	$\ln\lvert f(x)\rvert + C$	1. $\int \frac{2x-3}{x^2-3x+1}\,dx$	$u = x^2-3x+1$
			2. $\int \frac{e^x}{e^x+5}\,dx$	$u = e^x+5$
(D) $\int f(x;\sqrt{a^2-x^2})\,dx$	$x = a\cdot\sin u$ $dx = a\cdot\cos u\,du$ $\sqrt{a^2-x^2} = a\cdot\cos u$		1. $\int \sqrt{r^2-x^2}\,dx$	$x = r\cdot\sin u$
			2. $\int x\sqrt{r^2-x^2}\,dx$	$x = r\cdot\sin u$
			3. $\int \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}\,dx$	$x = 2\cdot\sin u$
(E) $\int f(x;\sqrt{x^2+a^2})\,dx$	$x = a\cdot\sinh u$ $dx = a\cdot\cosh u\,du$ $\sqrt{x^2+a^2} = a\cdot\cosh u$		1. $\int \sqrt{x^2+1}\,dx$	$x = \sinh u$
			2. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4}}$	$x = 2\cdot\sinh u$
(F) $\int f(x;\sqrt{x^2-a^2})\,dx$	$x = a\cdot\cosh u$ $dx = a\cdot\sinh u\,du$ $\sqrt{x^2-a^2} = a\cdot\sinh u$		1. $\int \sqrt{x^2-9}\,dx$	$x = 3\cdot\cosh u$
			2. $\int \frac{x}{\sqrt{x^2-25}}\,dx$	$x = 5\cdot\cosh u$

Partielle Integration

Produktintegration

Der Integrand $f_{(x)}$ des vorgegebenen unbestimmten Integral $\int f_{(x)}\ dx$ wird zunächst in „geeigneter Weise in ein Produkt aus zwei Funktionen $u_{(x)}$ und $v_{(x)}$ zerlegt.

$$\int f_{(x)}\ dx = \int u_{(x)} \cdot v_{(x)}\ dx$$

Dieses Integral lässt sich dann auch wie folgt darstellen:

$$\int u_{(x)} \cdot v_{(x)}\ dx = U_{(x)} \cdot v_{(x)} - \int U_{(x)} \cdot v'_{(x)}\ dx$$

Partialbruchzerlegung

Jeder gebrochenrationale Bruch, lässt sich durch Polynomdivision in eine Summe von Ausdrücken umwandeln, welche sich nach der Summenregel integrieren lassen. Besitzt diese Summe einen echt gebrochenen Anteil, so muss dieser speziell behandelt werden.

Jede *echt* gebrochenrationale Funktion vom Typ $f_{(x)} = \dfrac{Z_{(x)}}{N_{(x)}}$ lässt sich schrittweise wie folgt in eine Summe aus Partial – oder Teilbrüche zerlegen:

1 **Nullstellen des Nenners finden (auf Vielfachheit achten).**

2 **Polynome 2. Grades bilden falz dies möglich ist.**

3 **Bildung der Partialbrüche (auf Vielfachheit achten).**

4 **Gleichsetzen des Partialbruchs mit dem echt gebrochenen Bruch.**

5 **Bestimmung der einzelnen Partialbruchzähler.**

6 **Gliedweise Integration der Summanden.**

Beispiele für Vielfachheit:

$$f_{(x)} = \frac{x+1}{x^3 - 5x^2 + 8x - 4}$$

Nullstellen des Nenners:

$x_1 = 1 \quad ; \quad x_{2/3} = 2$ *Es gibt kein Polynom 2.Grades!*

Bildung der Partialbrüche

$x_1 = 1$ (*einfache Nullstelle*) $\Rightarrow \dfrac{A}{x-1}$

$x_{2/3} = 2$ (*doppelte Nullstelle*) $\Rightarrow \dfrac{B}{x-2} + \dfrac{C}{(x-2)^2}$

Gleichsetzen der Brüche

$$f_{(x)} = \frac{x+1}{x^3 - 5x^2 + 8x - 4} = \frac{x+1}{(x-1)\cdot(x-2)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-2)} + \frac{C}{(x-2)^2}$$

Bestimmung der einzelnen Partialbruchzähler, durch gleichnamig machen und anschließenden einsetzen von geeigneten x Werten.

$$x+1 = A(x-2)^2 + B(x-1)(x-2) + C(x-1)$$

Für: $x = 1 \Rightarrow A = 2$

$x = 2 \Rightarrow C = 3$

$x = 0 \Rightarrow B = -2$

Damit lautet der gesuchte Partialbruch:

$$f_{(x)} = \frac{x+1}{x^3 - 5x^2 + 8x - 4} = \frac{2}{x-1} - \frac{2}{x-2} + \frac{3}{(x-2)^2}$$

Beispiel für Polynom 2.Grades

Siehe Aufgabenblatt Nummer 9, Aufgabe 5) $_{(IV)}$

Formeln zur Integration von Partialbrüchen

Uneigentliche Integrale

$$(i) \quad \int \frac{A}{x-r}\,dx = A\ln|x-r|$$

$$(ii) \quad \int \frac{A}{(x-r)^k}\,dx = -\frac{A}{k-1}\cdot\frac{1}{(x-r)^{k-1}} \qquad k \geq 2$$

$$(iii) \quad \int \frac{Bx+C}{x^2+\ px\ q}\,dx = \frac{B}{2}\ln(x^2+px+q) + \frac{2C-Bp}{\sqrt{4q-p^2}}\ \arctan\left(\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}\right)$$

$$(iv) \quad \int \frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^k}\,dx = -\frac{B}{2(k-1)(x^2+px+q)^{k-1}} + \left(C-\frac{Bp}{2}\right)\cdot\int\frac{1}{(x^2+px+q)^k}\,dx$$

$$(iiv) \quad \int \frac{1}{(x^2+px+q)^k}\,dx = \frac{2x+p}{(k-1)(4q-p^2)(x^2+px+q)^{k-1}} + \frac{2(2k-3)}{(k-1)(4q-p^2)}\cdot\int\frac{1}{(x^2+px+q)^{k-1}}\,dx$$

Unbestimmte Integrale

Unbestimmte Integrale sind Integrale deren Grenzen offen (offene Intervalle) sind oder Grenzen die nicht im Definitionsbereich der Funktion liegen. Nun wird ein Endliches unbestimmtes Integral gebildet, deren Argumente gegen die Grenzen laufen.

Das unbestimmte Integral

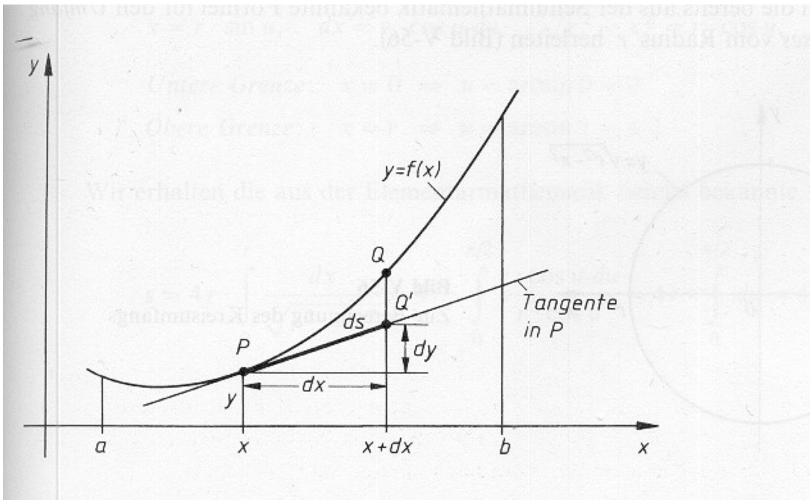
Existiert der Grenzwert, so ist das Integral konvergent, anderenfalls ist es divergent:

$$\int_a^{x_0} f_{(x)}\ dx = \lim_{t\to x_0}\int_a^t f_{(x)}\ dx$$

Anwendungen der Integralrechnung

Bogenlänge einer ebenen Kurve

Um die Länge einer Kurve zu ermitteln, zerteilt man zuerst die Kurve in sehr viele kleine Stücke. Jedes Stück hat die breite dx. Betrachtet man nun den Weg eines auf der Kurve befindlichen Punktes, von P nach Q, so legt dieser bei genügend kleinem dx die Strecke ds zurück.



$$ds^2 = dx^2 + dy^2 = dx^2 + dy^2 \cdot \frac{dx^2}{dx^2} = dx^2 \cdot \left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right) = dx^2 \cdot \left(1 + (f'_{(x)})^2\right)$$

$$\Rightarrow \quad ds = \sqrt{(1 + (f'_{(x)})^2)} \cdot dx$$

Wird nun Integriert :

$$\Rightarrow \quad s = \int \sqrt{(1 + (f'_{(x)})^2)} \cdot dx$$

Bogenlänge einer Ebenen Kurve

Die Bogenlänge über dem Intervall [a;b] der Funktion $f_{(x)}$:

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + (f'_{(x)})^2}\, dx$$