

## Inhaltsverzeichnis

<b>1 FUNKTIONEN MIT MEHREREN VARIABLEN.....</b>	<b>1</b>
<b>1.1 Darstellungsformen einer Funktion.....</b>	<b>1</b>
1.1.1 Analytische Darstellung.....	1
1.1.2 Darstellung durch eine Funktionstabelle ( Funktionstafel).....	1
1.1.3 Graphische Darstellung.....	2
1.1.3.1 Ebenen im Raum.....	2
1.1.3.2 Schnittkurvendiagramme.....	3
<b>1.2 Partielle Differentiation.....</b>	<b>4</b>
1.2.1 Partielle Ableitung 1. Ordnung.....	4
1.2.1.1 Durchführung der partiellen Ableitung.....	6
1.2.1.2 Geometrische Deutung.....	6
1.2.3 Partielle Ableitungen höherer Ordnung.....	7
<b>1.3 Das totale oder vollständige Differential einer Funktion.....</b>	<b>8</b>
1.3.2 Tangentialebene.....	8
1.3.3 Definition des totalen oder vollständigen Differentials einer Funkt. mit 2 Variablen.....	9
1.3.4 Definition des totalen oder vollständigen Differentials einer Funkt. mit n Variablen.....	10
1.3.5 Anwendung des totalen Differentials.....	10
1.3.5.1 Linearisierung einer Funktion.....	10
1.3.5.2 Implizite Differentiation.....	11
<b>1.4 Relative oder lokale Extrema.....</b>	<b>12</b>
1.4.1 Hessematrix.....	12
1.4.1.1 Allgemeine Form.....	12
1.4.1.2 Definite Matrizen.....	13
<b>1.5 Doppelintegrale.....</b>	<b>14</b>
1.5.1 In Kartesischen Koordinaten.....	14
1.5.2 In Polarkoordinaten.....	15
1.5.3 Anwendung des Doppelintegrals.....	16
1.5.3.1 Flächeninhalt.....	16
1.5.3.2 Schwerpunkt einer Fläche.....	17
1.5.3.3 Flächenträgheitsmomente.....	17
<b>1.6 Dreifachintegral.....</b>	<b>18</b>
1.6.1 Berechnung des Dreifachintegrals.....	19
1.6.1.1 In kartesischen Koordinaten.....	19
1.6.1.2 In Zylinderkoordinaten.....	20
1.6.2 Anwendungen des Dreifachintegrals.....	21
1.6.3 Volumen eines Körpers.....	21
1.6.4 Funktionsgleichung einer Rotationsfläche.....	23
1.6.5 Schwerpunkt eines homogenen Körpers.....	23
<b>2 SKALAR- UND VEKTORFELDER.....</b>	<b>24</b>
<b>2.1 Gradient eines Skalarfeldes.....</b>	<b>25</b>
<b>2.2 Richtungsableitung.....</b>	<b>25</b>

<b>2.3 Divergenz</b>	<b>26</b>
<b>2.4 Rotation eines Vektorfeldes</b>	<b>27</b>
<b>2.5 Differentialoperator „Nabla“</b>	<b>28</b>
<b>2.6 Eigenschaften von bestimmten Feldern</b>	<b>28</b>
<b>3 LINIEN UND KURVENINTEGRALE</b>	<b>29</b>
<b>3.1 Herleitung des Arbeitsintegrals</b>	<b>29</b>
<b>3.2 Berechnung des Linien oder Kurvenintegrals</b>	<b>30</b>
<b>3.3 Wegunabhängigkeit eines Kurvenintegral</b>	<b>32</b>
<b>3.4 Integralsätze von Gauß u. Stoke</b>	<b>33</b>
3.4.1 Gaußscher Integralsatz im Raum	33
3.4.2 Gaußscher Integralsatz in der Ebene	34
3.4.3 Stokes'scher Integralsatz	34
<b>4 KOMPLEXE ZAHLEN UND FUNKTIONEN</b>	<b>35</b>
<b>4.1 Definition</b>	<b>35</b>
4.1.1 imaginäre Einheit	35
4.1.2 imaginäre Zahl	35
4.1.3 komplexe Zahl	36
<b>4.2 Die Gaußsche Zahlenebene</b>	<b>36</b>
<b>4.3 Grundbegriffe</b>	<b>37</b>
4.3.1 Gleichheit zweier komplexen Zahlen	37
4.3.2 Konjugierte komplexe Zahl	37
4.3.3 Betrag einer komplexen Zahl	38
<b>4.4 Darstellungsformen einer komplexen Zahl</b>	<b>38</b>
4.4.1 Kartesische oder Normal Form	38
4.4.2 Polarform	38
4.4.3 Exponentialform	39
<b>4.5 Rechenoperationen</b>	<b>40</b>
4.5.1 Grundrechenarten	40
4.5.2 Potenzieren	41
4.5.3 Radizieren	41
4.5.4 Logarithmieren	42
<b>4.6 Anwendungen der komplexen Rechnung</b>	<b>43</b>
4.6.1 Darstellung von Schwingungen im Zeigerdiagramm	43
4.6.2 Ungestörte Überlagerung von Schwingungen gleicher Frequenz	45
4.6.3 Berechnung eines Wechselstromkreises	46
4.6.3.1 Ohmsches Gesetz der Wechselstromtechnik	46
4.6.3.2 Widerstandsoperatoren	46
4.6.3.2.1 Ohmscher Widerstand	46
4.6.3.2.2 Kapazität	46
4.6.3.2.3 Induktivitäten	47
4.6.3.2.4 Leitwertoperator	47
4.6.3.2.5 Übersicht	48
4.6.4 Ortskurven	48
4.6.4.1 Inversion	49
4.6.4.2 Übersicht von Grundschtungs – Ortskurven	51

<b>5 DIFFERENTIALGLEICHUNGEN.....</b>	<b>52</b>
<b>5.1 DGL 1. Ordnung.....</b>	<b>52</b>
5.1.1 Trennung der Variablen.....	52
5.1.1.1 Direkt.....	52
5.1.1.2 Substitution .....	52
5.1.2 Variation der Konstanten.....	52
5.1.3 Ansatz einer partikulären Lösung .....	53
5.1.4 Komplexer Ansatz.....	53
<b>5.2 DGL 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten .....</b>	<b>53</b>
<b>5.3 Homogene Lösungsfindung.....</b>	<b>53</b>
5.3.1 Fall 1 (Kriechfall).....	54
5.3.2 Fall 2 (aperiodischer Grenzfall).....	54
5.3.3 Fall 3 .....	54
<b>5.4 Störgliedbetrachtung.....</b>	<b>55</b>
5.4.1 Partikuläre Lösung.....	55
5.4.2 Komplexer Ansatz.....	55
<b>5.5 Schnellübersicht.....</b>	<b>55</b>



# 1 Funktionen mit mehreren Variablen

Unter einer Funktion von  $n$  *unabhängigen Variablen* ( also  $n$  Tupel ) versteht man eine Vorschrift, die jedem geordneten Zahlenpaar  $(x_1 ; x_2 ; \dots ; x_n)$  aus einer Menge  $D$  ( Definitionsbereich) genau ein Element  $y$  aus einer Menge  $W$  ( Wertebereich) zuordnet. Symbolische Schreibweise:

$$(x_1 ; x_2 ; \dots ; x_n) \mapsto f_{(x_1 ; x_2 ; \dots ; x_n)} = y$$

## 1.1 Darstellungsformen einer Funktion

### 1.1.1 Analytische Darstellung

Die analytische Darstellungsform liegt die Funktion in der Form einer Gleichung vor.

Explizite Darstellung:  $z = f_{(x,y)}$

Implizite Darstellung:  $F_{(x,y)} = 0$

### 1.1.2 Darstellung durch eine Funktionstabelle ( Funktionstafel)

2. unabhängige Variable  $y$

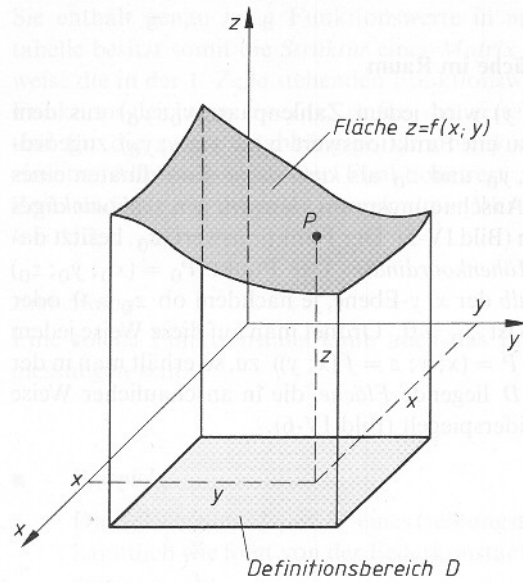
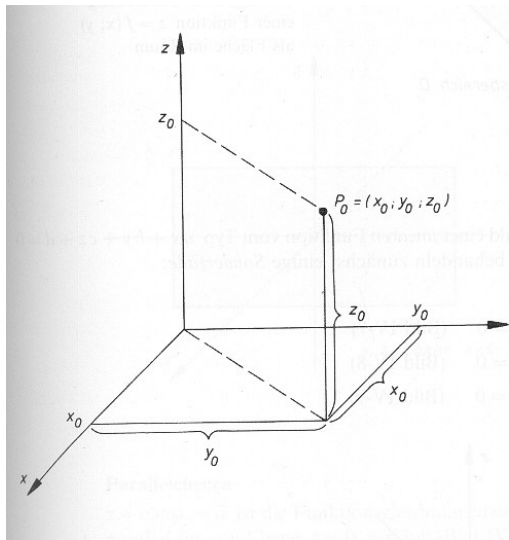
	$y$	$y_1$	$y_2$	$\dots$	$y_k$	$\dots$	$y_n$
$x$							
$x_1$		$z_{11}$	$z_{12}$	$\dots$	$z_{1k}$	$\dots$	$z_{1n}$
$x_2$		$z_{21}$	$z_{22}$	$\dots$	$z_{2k}$	$\dots$	$z_{2n}$
$\cdot$		$\cdot$	$\cdot$	$\dots$	$\cdot$	$\dots$	$\cdot$
$\cdot$		$\cdot$	$\cdot$	$\dots$	$\cdot$	$\dots$	$\cdot$
$\cdot$		$\cdot$	$\cdot$	$\dots$	$\cdot$	$\dots$	$\cdot$
$x_i$		$z_{i1}$	$z_{i2}$	$\dots$	$z_{ik}$	$\dots$	$z_{in}$
$\cdot$		$\cdot$	$\cdot$	$\dots$	$\cdot$	$\dots$	$\cdot$
$\cdot$		$\cdot$	$\cdot$	$\dots$	$\cdot$	$\dots$	$\cdot$
$x_m$		$z_{m1}$	$z_{m2}$	$\dots$	$z_{mk}$	$\dots$	$z_{mn}$

↑  
k-te Spalte

1. unabhängige Variable  $x$

← i-te Zeile

### 1.1.3 Graphische Darstellung

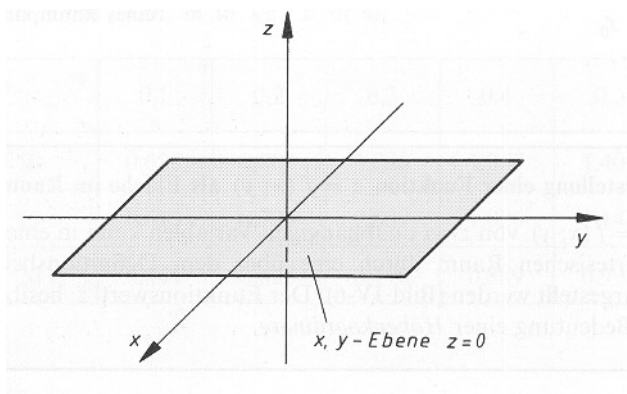


**Geometrische Darstellung einer Funktion mit zwei Variablen**

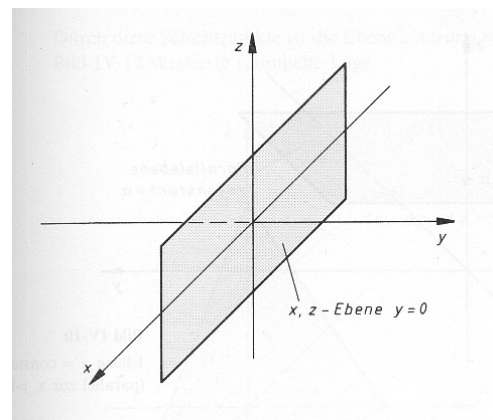
Eine Funktion von zwei unabhängigen Variablen kann in einem dreidimensionalen kartesischen Raum durch eine über dem Definitionsbereich  $D$  liegende *Fläche* dargestellt werden. Der Funktionswert  $z$  besitzt dabei die geometrische Bedeutung der *Höhenkoordinate*.

#### 1.1.3.1 Ebenen im Raum

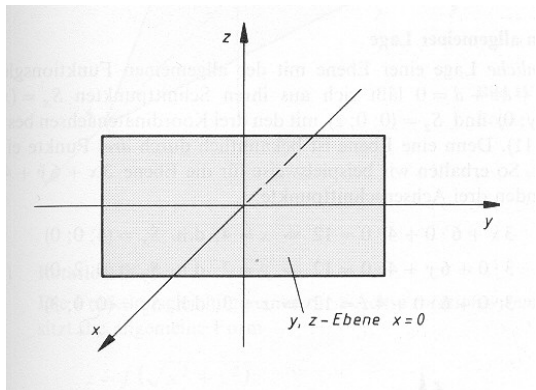
x-y Ebene bedeutet  $z = 0$



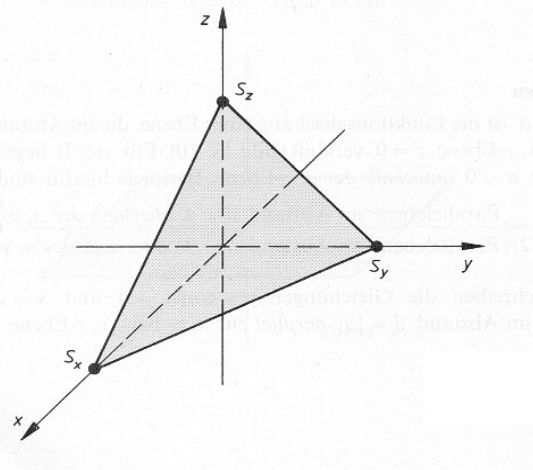
x-z Ebene bedeutet  $y = 0$



$y - z$  Ebene bedeutet  $x = 0$



Ebene in allgemeiner Lage  
 $a x + b y + c z + d = 0$



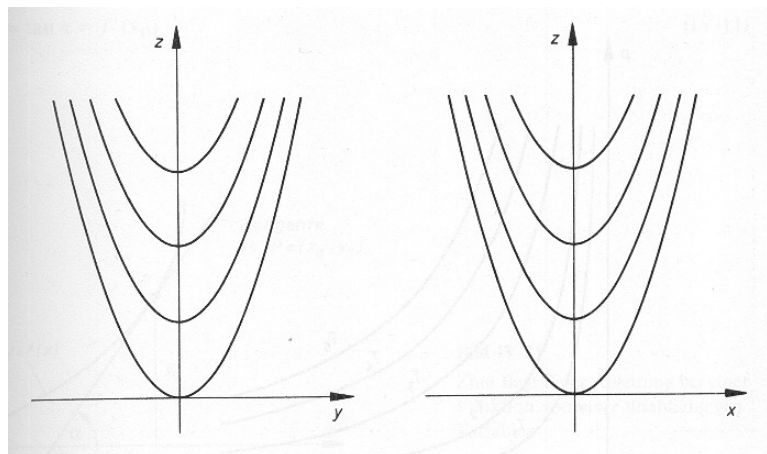
### 1.1.3.2 Schnittkurvendiagramme

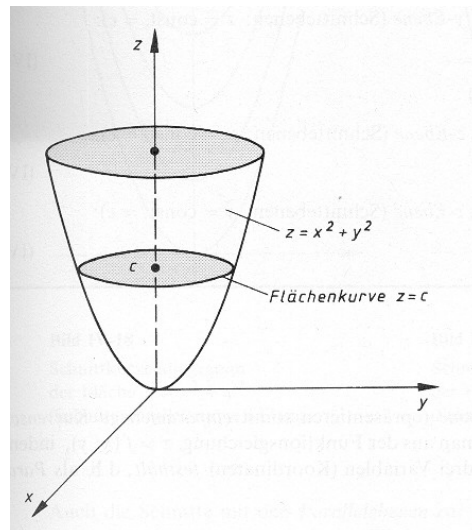
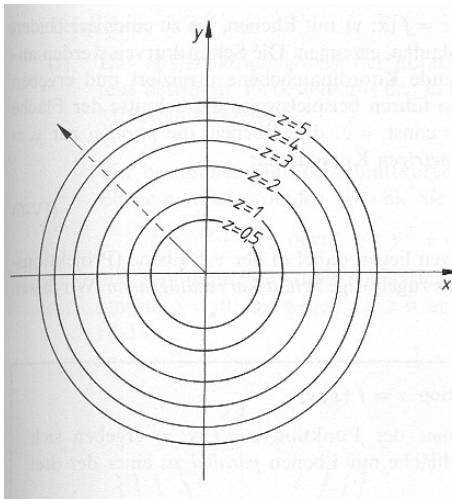
#### Schnittkurvendiagramme einer Funktion $z = f(x,y)$

Die folgenden Schnittkurvendiagramme einer Funktion ergeben sich durch Schnitte der zugehörigen Bildflächen mit Ebenen parallel zu einer der drei Koordinatenebenen:

1. *Schnitte parallel zur  $x-z$  Ebene ( $y = \text{konst.}$ )*
2. *Schnitte parallel zur  $y-z$  Ebene ( $x = \text{konst.}$ )*
3. *Schnitte parallel zur  $x-y$  Ebene ( $z = \text{konst.}$ )*  
*(Höhenlinien Diagramm)*
4. *Zusammenführung der Schnittkurven*

Beispiel: Rotationsparaboloid ( $z = x^2 + y^2$ )





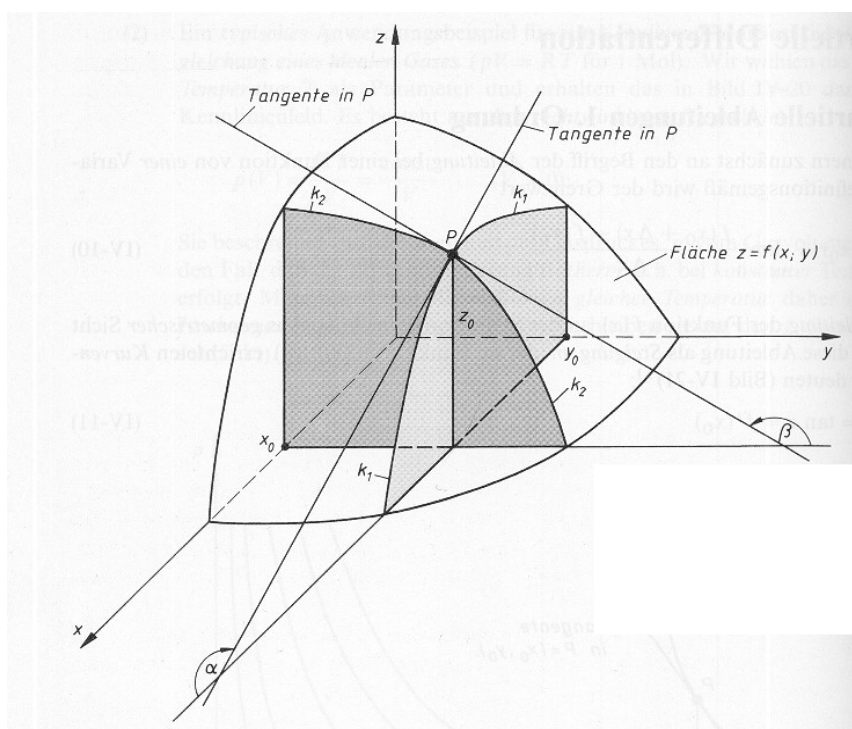
## 1.2 Partielle Differentiation

### 1.2.1 Partielle Ableitung 1. Ordnung

Bei Funktionen mit einer Variablen repräsentiert die 1. Ableitung die Steigung der Tangente in einem Kurzenpunkt in x Richtung.

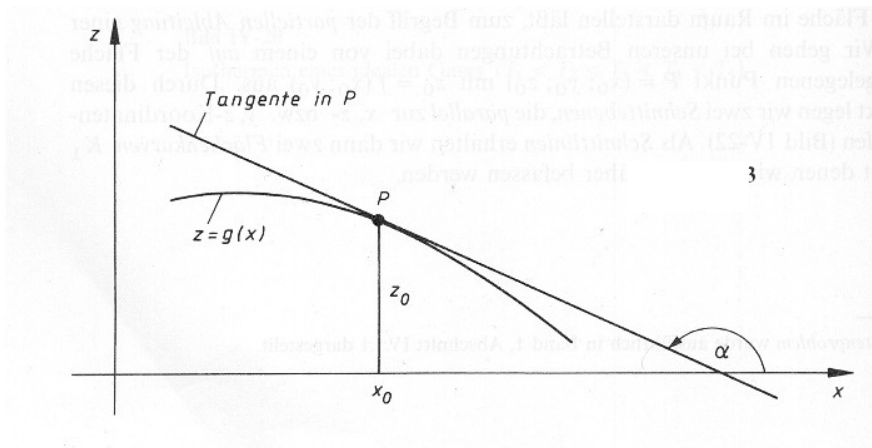
Analog gilt diese Überlegung für die Ableitung von Funktionen mit mehreren Variablen.

Wählt man einen Punkt auf einer Bildfläche, und legt durch diesen Punkt zwei Schnittebenen, so erhält man für jede Schnittebene eine Tangentensteigung für den interessierenden Punkt. Diese Steigung wird errechnet, indem man die Funktion von mehreren Variablen auf eine Variable mit mehreren Konstanten zurückführt.

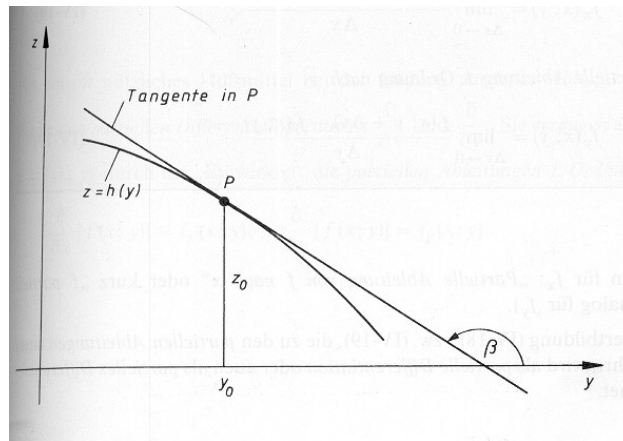




Schnitt der Fläche mit der  $E_{xz}$  Ebene:



Schnitt der Fläche mit der  $E_{yz}$  Ebene:



**Definition der partiellen Ableitung 1. Ordnung**

Unter den partiellen Ableitungen 1. Ordnung einer Funktion  $z = f_{(x,y)}$  an der Stelle  $(x,y)$  werden die folgenden Grenzwerte verstanden ( falls sie vorhanden sind ):

*Partielle Ableitung 1.Ordnung nach x:*

$$f_x(x;y) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x; y) - f(x; y)}{\Delta x}$$

*Partielle Ableitung 1. Ordnung nach y:*

$$f_y(x; y) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x; y + \Delta y) - f(x; y)}{\Delta y}$$

### 1.2.1.1 Durchführung der partiellen Ableitung

Wie schon erwähnt, kann die partielle Ableitung auf eine gewöhnliche Ableitung zurückgeführt werden, da in der jeweils betrachteten Ebene es nur eine Variable gibt. Die anderen „Variablen“ sind in dieser Ebene Konstanten. Und genauso muss man sie bei der Ableitung auch behandeln.

Leitet man nach  $x$  ab, so ist  $x$  die einzige echte Variable, die anderen sind als Konstanten zu behandeln.

Man schreibt: *Für die Ableitung nach  $x$  mit dem eingesetzten Tupel  $(x; y)$ :*

$$f_x(x; y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x; y)$$

*Für die Ableitung nach  $y$  mit dem eingesetzten Tupel  $(x; y)$ :*

$$f_y(x; y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x; y)$$

### 1.2.1.2 Geometrische Deutung

Die geometrische Deutung der partiellen Ableitung von  $z = f_{(x,y)}$  an der Stelle  $(x_0; y_0)$  ist:

$f_x(x_0; y_0) \Rightarrow$  Anstieg der Flächentangente im Flächenpunkt  $P(x_0; y_0; z_0)$  in  $x$ -Richtung.

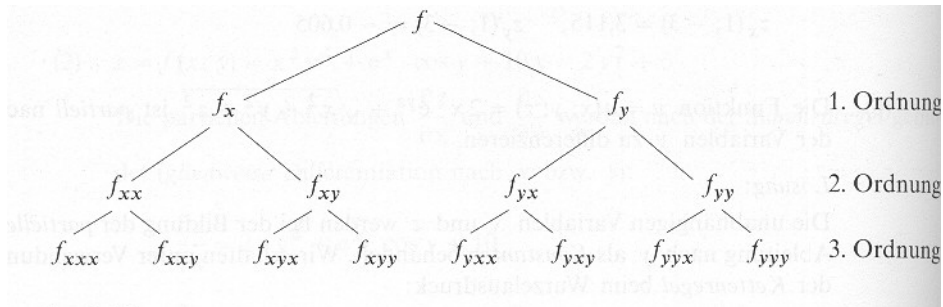
$f_y(x_0; y_0) \Rightarrow$  Anstieg der Flächentangente im Flächenpunkt  $P(x_0; y_0; z_0)$  in  $y$ -Richtung.

Die partiellen Ableitungen 1. Ordnung von  $z = f_{(x,y)}$  bestimmen damit den Anstieg der Bildfläche in  $P$  in Richtung der  $x$  bzw.  $y$ -Achse.

## 1.2.2

### 1.2.3 Partielle Ableitungen höherer Ordnung

Auf partielle Ableitungen höherer Ordnung stößt man, wenn man eine Funktion von mehreren unabhängigen Variablen mehrmals nacheinander partiell differenziert.



#### Satz von Schwarz

Bei einer *gemischten* partiellen Ableitung  $k$ -ter Ordnung darf die Reihenfolge der einzelnen Differentiationsschritte *vertauscht* werden, wenn die partiellen Ableitungen  $k$ -ter Ordnung *stetige* Funktionen sind.

## 1.3 Das totale oder vollständige Differential einer Funktion

### 1.3.1

### 1.3.2 Tangentialebene

Die Rolle, die die *Kurventangente* bei einer Funktion von *einer* Variablen spielt, übernimmt bei der Funktion  $z = f_{(x,y)}$  von zwei Variablen die sog. Tangentialebene.

Sie enthält sämtliche im Flächenpunkt  $P_0$  an die Bildfläche von  $z$  angelegten Tangenten. In der unmittelbaren Umgebung ihres Berührungspunktes  $P$  besitzen Fläche und Tangentialebene i.a keinen weiteren gemeinsamen Punkt.

Nun soll die Funktionsgleichung dieser Tangentialebene bestimmt werden. Aus der Linearen Algebra ist bekannt:

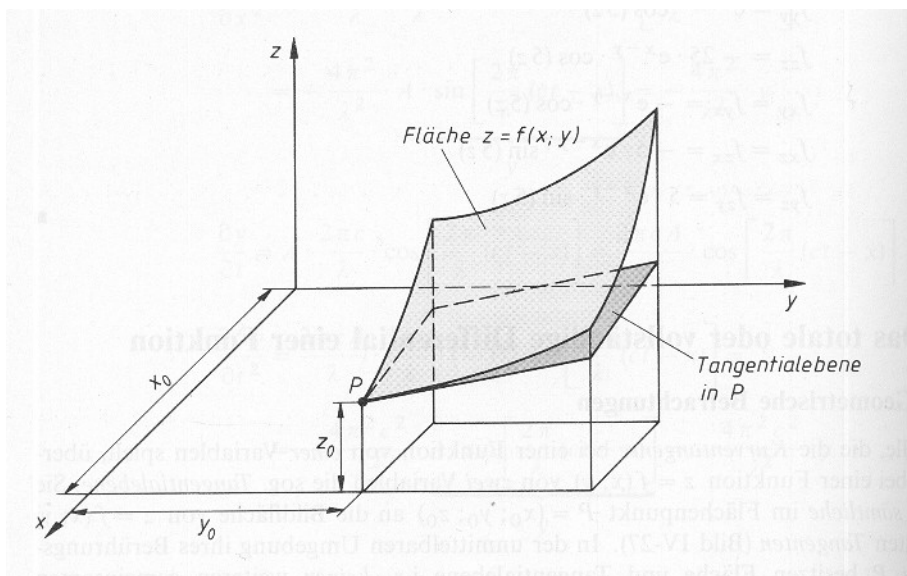
$$z = ax + by + c$$

Die unbekanntenen Koeffizienten  $a, b$  und  $c$  werden aus den bekannten Eigenschaften der Tangentialebene bestimmt. Die Koeffizienten  $a$  und  $b$  geben jeweils die Steigung der Tangentialebene mal in  $x$  mal in  $y$  Richtung an. Somit gilt:

$$a = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0; y_0) \quad ; \quad b = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0; y_0)$$

Bedenkt man, dass  $P_0$  ein gemeinsamer Punkt von Fläche und Tangentialebene ist, so erhält man durch Einsetzen der Koordinaten von  $P$  in die Gleichung der Tangentialebene den Koeffizient  $c$ .

$$z_0 = a x_0 + b y_0 + c \quad \Rightarrow \quad c = z_0 - f_x(x_0; y_0) \cdot x_0 - f_y(x_0; y_0) \cdot y_0$$



**Gleichung einer Tangentialebene**

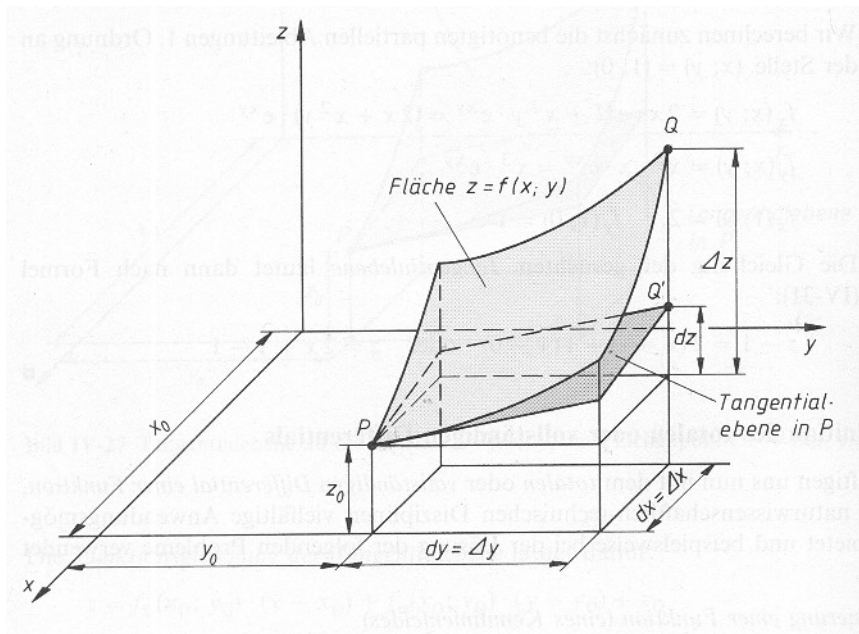
Die Gleichung der Tangentialebene an die Fläche  $z = f_{(x,y)}$  im Flächenpunkt  $P(x_0; y_0; z_0)$  lautet:

*In allgemeiner Form:*  $z = f_x(x_0; y_0) \cdot (x - x_0) + f_y(x_0; y_0) \cdot (y - y_0) + z_0$

*In symmetrischer Form:*  $z - z_0 = f_x(x_0; y_0) \cdot (x - x_0) + f_y(x_0; y_0) \cdot (y - y_0)$

**1.3.3 Definition des totalen oder vollständigen Differentials einer Funkt. mit 2 Variablen**

Sei eine Funktion  $z = f_{(x,y)}$  und ein Punkt  $P(x_0; y_0; z_0)$  gegeben. Vergleicht man die Änderung der Höhenkoordinate bezüglich einer Verschiebung dieses Punktes auf der Fläche selbst, und auf der Tangentialebene, so fällt auf, dass die Tangentialebene als Linearisierung der Fläche angesehen werden kann. Denn der Höhenunterschied zwischen der Tangentialebene und der wirklichen Fläche ist für kleine Verschiebungen des Punktes sehr klein.



**Das totale oder vollständige Differential**

Das totale Dif. Beschreibt die Änderung der Höhenkoordinate des Funktionswerts auf der im Berührungspunkt  $P_0$  errichteten Tangentialebenen.

$$dz = f_x(x_0; y_0) \cdot dx + f_y(x_0; y_0) \cdot dy$$

### 1.3.4 Definition des totalen oder vollständigen Differentials einer Funkt. mit n Variablen

Der Begriff des totalen Differentials lässt sich ohne Schwierigkeiten auch auf Funktionen von mehr als zwei unabhängigen Variablen übertragen.

Das totale Differential allgemein:

$$dy = f_{x_1} dx_1 + f_{x_2} dx_2 + \dots + f_{x_n} dx_n$$

### 1.3.5 Anwendung des totalen Differentials

#### 1.3.5.1 Linearisierung einer Funktion

Ist eine Funktion mit mehreren Variablen gegeben, von denen die Variablen nicht tolleranzfrei sind, dann kann das totale Differential dazu genutzt werden die Abweichung der Linearisierten Funktion z.B. Tangentialebene zu bestimmen. (Siehe Strom und Spannungsrichtige Schaltung.)

#### Linearisierung einer Funktion

In der Umgebung eines Flächenpunktes  $P_0$  kann die *nichtlineare* Funktion  $z = f_{(x,y)}$  *näherungsweise* durch die lineare Funktion (Tangentialebene) ersetzt werden.

$$\Delta z = f_x(x_0; y_0) \cdot \Delta x + f_y(x_0; y_0) \cdot \Delta y$$

### 1.3.5.2 Implizite Differentiation

Sei eine Funktion in impliziter Form  $f_{(x,y)} = 0$  gegeben, oder wurde eine beliebige Funktion  $f_{(x)} = y$  nach 0 umgestellt. Fasst man nun diese Gleichung als Schnittlinie der Fläche  $z = f_{(x,y)}$  mit der  $x,y$  Ebene ( $z = 0$ ) auf, dann ist die Bestimmung des totalen Differentials möglich.

$$dz = f_x dx + f_y dy$$

Für die Punkte der Schnittkurve ist  $z = 0$  somit auch  $dz = 0$ .

$$f_x dx + f_y dy = 0 \quad \Rightarrow \quad f_x \frac{dx}{dx} + f_y \frac{dy}{dx} = \frac{0}{dx} \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{f_x}{f_y} = f'_{(x)}$$

#### Implizite Differentiation

Der Anstieg einer in der implizit Form  $f_{(x,y)} = 0$  dargestellten Funktionskurve im Kurvenpunkt P lässt sich mit der partiellen Differentiation wie folgt bestimmen:

$$f'_{(x)} = -\frac{F_x}{F_y}$$

$F_x$  Partielle Ableitung 1.Ordnung der Impliziten Gleichungsform nach x.  
 $F_y$  .....

y.

## 1.4 Relative oder lokale Extrema

### Notwendige Bedingung

In einem relativen Extremum  $(x_0; y_0)$  der Funktion  $z = f_{(x,y)}$  besitzt die zugehörige Bildfläche stets eine zur  $x,y$  Ebene parallele Tangentialebene.

$$\text{grad}f = \underline{0}$$

Für den Fall von 2 Variablen heißt dass:

$$f_x(x_0; y_0) = 0 \quad \text{und} \quad f_y(x_0; y_0) = 0$$

### Hinreichende Bedingung für einen Extremwert

1. Notwendige Bedingung ist erfüllt.
2. Die Hessematrix ist positiv definit (Minimum) oder negativ definit (Maximum).  
Ist sie indefinit liegt ein Sattelpunkt vor, und für semidefinit kann keine Aussage

### 1.4.1 Hessematrix

#### 1.4.1.1 Allgemeine Form

$$H_f = \begin{pmatrix} f_{x_1;x_1} & f_{x_1;x_2} & \cdots & f_{x_1;x_n} \\ f_{x_2;x_1} & f_{x_2;x_2} & \cdots & f_{x_2;x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ f_{x_n;x_1} & f_{x_n;x_2} & \cdots & f_{x_n;x_n} \end{pmatrix}$$



### 1.4.1.2 Definite Matrizen

Sei  $A$  eine symmetrische Matrix in  $\mathbb{R}^{(n,n)}$ , dann heißt  $\det H_i$  die  $i$ -te Hauptunterdeterminante. Dann gilt für alle  $i = 1, \dots, n$ :

$A$  ist positiv definit  $\leftrightarrow \det H_i > 0$

$A$  ist negativ definit  $\leftrightarrow (-1)^i \det H_i > 0$

$A$  ist positiv semidefinit  $\rightarrow \det H_i \geq 0$

$A$  ist negativ semidefinit  $\rightarrow (-1)^i \det H_i \geq 0$

Für alle anderen ist sie indefinit.

(Download beachten!!!)

#### Hinreichende Bedingung für Funktion mit zwei Variablen

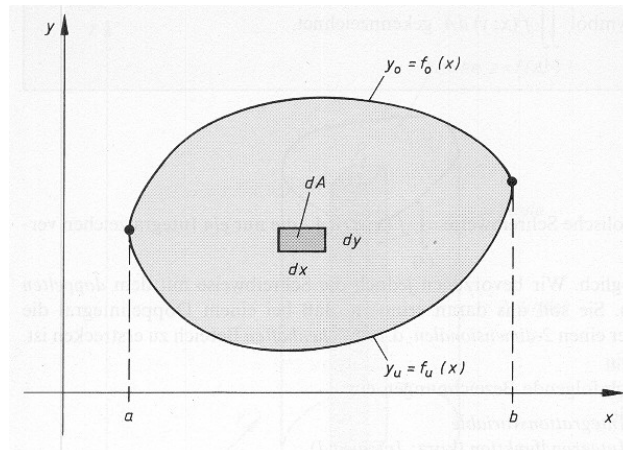
1. Notwendige Bedingung
2.  $\Delta = f_{xx}(x_0; y_0) \cdot f_{yy}(x_0; y_0) - f_{xy}^2(x_0; y_0) > 0$
3.  $f_{xx}(x_0; y_0) < 0 \Rightarrow \text{Maximum}$   
 $f_{xx}(x_0; y_0) > 0 \Rightarrow \text{Minimum}$

## 1.5 Doppelintegrale

### 1.5.1 In Kartesischen Koordinaten

Die Problemstellung ist, das Volumen eines Körpers zu berechnen. Dazu werden zuerst kleine Säulen gebildet, die im ersten Schritt zu einer Scheibe (Volumenschicht) integriert wird ( $y_u$  bis  $y_o$ ), und im zweiten Schritt wird die Scheibe zu einem Volumen des Körpers integriert.

Ausgangspunkt dieser Überlegung ist der Integrationsbereich der Höhengschnitt bei  $z = 0$ .

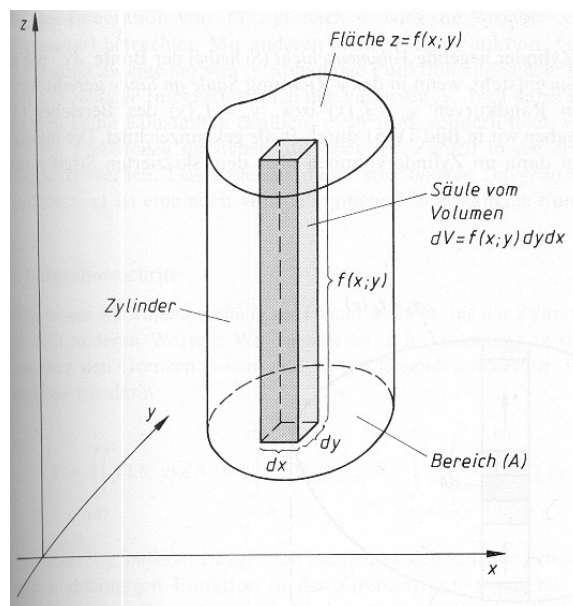


Das Flächenelement  $dA$  besitzt in der kartesischen Darstellung die geometrische Form eines Rechtecks, mit den Seitenlängen  $dx$  und  $dy$ .

$$dA = dy \, dx$$

Über diesem Flächenelement liegt eine (Quaderförmige) Säule mit dem infinitesimal kleinen Rauminhalt:

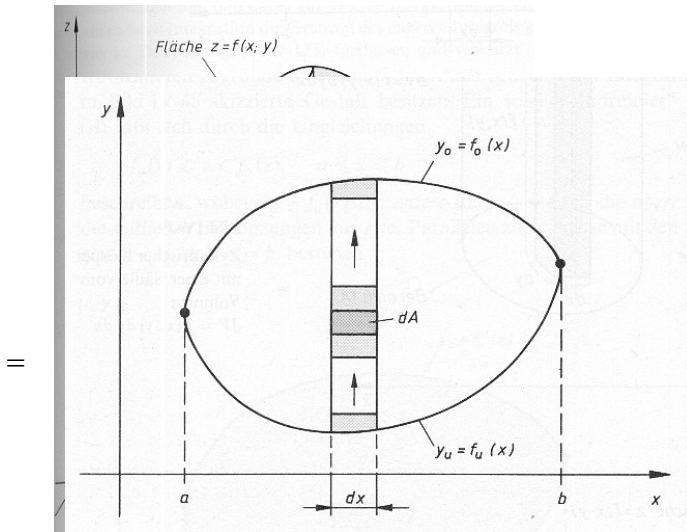
$$dV = z \, dA = f_{(x,y)} \, dy \, dx$$



Für die nun folgende Betrachtung soll gelten: („Egal“ z.B.  $f_u$ )<sub>u</sub> < („Egal“ z.B.  $f_o$ )<sub>o</sub>

**1.Integrationsschritt**

Betrachtet man eine im Zylinder liegende Volumenschicht (Scheibe) der Breite  $dx$ . Sie entsteht, wenn in der  $y$  Richtung Säule an Säule gereiht wird, bis man an die beiden Randkurven  $y_u$  bzw.  $y_o$  des Bereiches  $A$  stößt. Die infinitesimal dünne Scheibe liegt dann im Zylindervolumen über dem skizzierten Streifen der Breite  $dx$ .



Das Volumen der Scheibe erhalten wir dann durch Summation aller in der Volumenschicht gelegenen Säulenvolumina, d.h. durch Integration von  $dV = f(x; y) dy dx$  in der  $y$ - Richtung zwischen der unteren Grenze  $y = f_u$  und der oberen Grenze  $y = f_o$ .

$$dV_{Scheibe} = \int_{y=f_u}^{y=f_o} f(x; y) dy dx$$

Wie schon bei der Differentiation so gilt auch bei der Integration, dass alle Variabel nach denen noch nicht integriert wird als Konstanten behandelt werden.

**2. Integrationsschritt**

Setzt man nun Volumenschicht an Volumenschicht, bis der Zylinder vollständig ausgefüllt ist, erhält man das Volumen des Körpers. Das heißt, werden in  $x$  Richtung die Scheiben summiert, d.h. integriert und zwar zwischen den Grenzen  $x = a$  und  $x = b$  erhält man das Integral für das Gesamtvolumen.

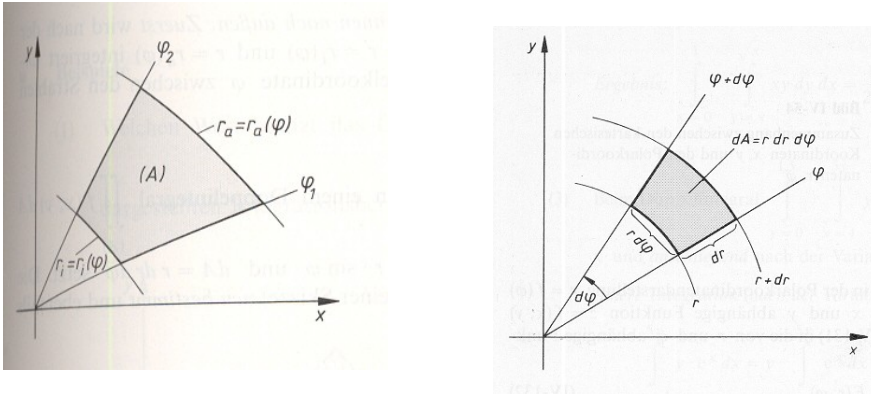
$$V = \int_{x=a}^b \int_{y=f_u}^{f_o} f(x; y) dy dx$$

**1.5.2 In Polarkoordinaten**

In vielen Fällen vereinfacht sich die Berechnung eines Doppelintegrals erheblich, wenn man an der Stelle der kartesischen Koordinaten  $x$  und  $y$  die Polarkoordinaten  $r$  und  $\varphi$  verwendet. Zwischen ihnen besteht der folgende Zusammenhang:

$$x = r \cdot \cos(\varphi) \quad ; \quad y = r \cdot \sin(\varphi)$$

Der Integrationsbereich A in Polarkoordinaten Darstellung.



Das bedeutet, dass ein infinitesimal kleines Flächenstück  $dA$  zwischen dem äußeren Radius und dem inneren Radius summiert, also integriert wird. Weiter wird das Flächenelement in den Grenzen von  $\varphi_1$  bis zu  $\varphi_2$  integriert. Das Flächenstück  $dA$  setzt sich aus  $r$ ,  $dr$  und  $d\varphi$  zusammen.

$$V = \int_{\varphi = \varphi_1}^{\varphi_2} \int_{r = r_i}^{r_a} f(r \cdot \cos(\varphi) ; r \cdot \sin(\varphi)) \cdot r \, dr \, d\varphi$$

**Zusammenfassung des Doppelintegrals zur Volumenberechnung**

*Das Volumen gilt bezüglich der x-y Ebene!*

In Kartesischen Koordinaten:

$$V = \int_{x=a}^b \int_{y=f_u}^{f_o} f(x; y) \, dy \, dx$$

In Polarkoordinaten:

$$V = \int_{\varphi = \varphi_1}^{\varphi_2} \int_{r = r_i}^{r_a} f(r \cdot \cos(\varphi) ; r \cdot \sin(\varphi)) \cdot r \, dr \, d\varphi$$

### 1.5.3 Anwendung des Doppelintegrals

#### 1.5.3.1 Flächeninhalt

Setzt man die Funktion  $f_{(x,y)}$  gleich 1, für alle  $x$  und  $y$  aus dem Definitionsbereich, so erhält man nicht das Volumen des Körpers sondern die Fläche der  $x - y$  Ebene.

**Flächeninhalt**

Definitionsformel: 
$$A = \int \int_{(A)} dA$$

In kartesischen Koordinaten: 
$$A = \int_{x=a}^b \int_{y=f_u}^{f_o} dy dx$$

In Polarkoordinaten: 
$$A = \int_{\varphi=\varphi_1}^{\varphi_2} \int_{r=r_i}^{r_a} r dr d\varphi$$

### 1.5.3.2 Schwerpunkt einer Fläche

Auf die Herleitung wird verzichtet. Nach dem 1. Integrationsschritt wird aber klar dass es gilt. Vergleiche Herleitung des Schwerpunktes in Physik.

Definitionsformel:

$$x_s = \frac{1}{A} \cdot \int \int_{(A)} x dA \quad ; \quad y_s = \frac{1}{A} \cdot \int \int_{(A)} y dA$$

In kartesischen Koordinaten:

$$x_s = \frac{1}{A} \cdot \int_{x=a}^b \int_{y=f_u}^{f_o} x dy dx \quad ; \quad y_s = \frac{1}{A} \cdot \int_{x=a}^b \int_{y=f_u}^{f_o} y dy dx$$

In Polarkoordinaten:

$$x_s = \frac{1}{A} \cdot \int_{\varphi=\varphi_1}^{\varphi_2} \int_{r=r_i}^{r_a} r^2 \cos(\varphi) dr d\varphi \quad ; \quad y_s = \frac{1}{A} \cdot \int_{\varphi=\varphi_1}^{\varphi_2} \int_{r=r_i}^{r_a} r^2 \sin(\varphi) dr d\varphi$$

### 1.5.3.3 Flächenträgheitsmomente

Auf die Herleitung wird verzichtet, denn keine Ahnung.

**Axiale und polare Flächenmomente 2. Grades (Flächenträgheitsmomente)**

Definitionformeln (Bild IV-69):

$$I_x = \iint_{(A)} y^2 dA, \quad I_y = \iint_{(A)} x^2 dA, \quad I_p = \iint_{(A)} r^2 dA \quad ($$

$$I_p = I_x + I_y \quad ($$

In kartesischen Koordinaten (Bild IV-59):

$$I_x = \int_{x=a}^b \int_{y=f_a(x)}^{f_o(x)} y^2 dy dx$$

$$I_y = \int_{x=a}^b \int_{y=f_a(x)}^{f_o(x)} x^2 dy dx \quad ($$

$$I_p = \int_{x=a}^b \int_{y=f_a(x)}^{f_o(x)} (x^2 + y^2) dy dx$$

In Polarkoordinaten (Bild IV-60):

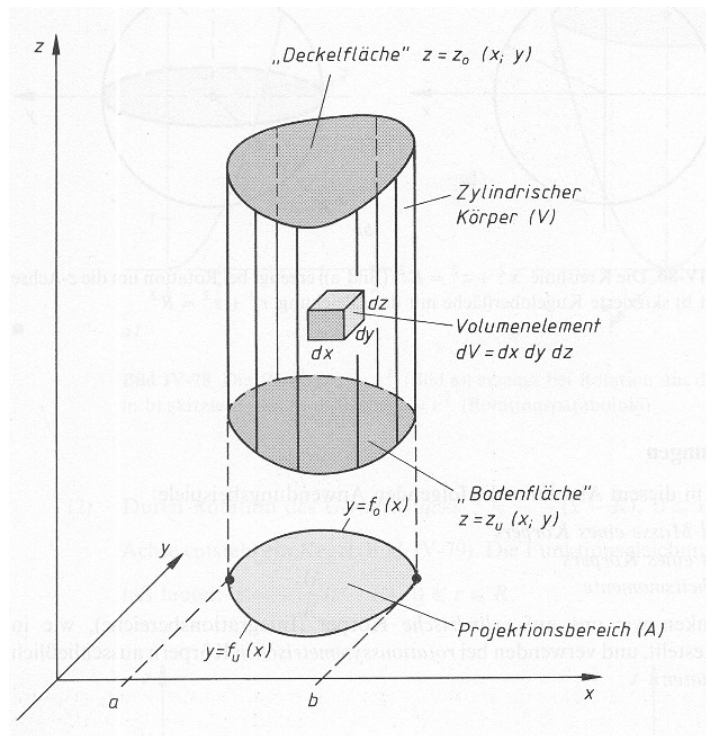
$$I_x = \int_{\varphi=\varphi_1}^{\varphi_2} \int_{r=r_i(\varphi)}^{r_a(\varphi)} r^3 \cdot \sin^2 \varphi dr d\varphi$$

$$I_y = \int_{\varphi=\varphi_1}^{\varphi_2} \int_{r=r_i(\varphi)}^{r_a(\varphi)} r^3 \cdot \cos^2 \varphi dr d\varphi \quad ($$

$$I_p = \int_{\varphi=\varphi_1}^{\varphi_2} \int_{r=r_i(\varphi)}^{r_a(\varphi)} r^3 dr d\varphi$$

**1.6 Dreifachintegral**

Mit dem Einfachintegral kann man Flächen bestimmen. Mit dem Zweifachintegral wurden Volumina bestimmt. Eine ähnliche geometrische Deutung ist bei dem Dreifachintegral nicht möglich.



In Analogie kann man aber folgendes sagen:

Der Grenzwert

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \Delta V_k \rightarrow 0}} = \sum_{k=1}^n f(x_k; y_k; z_k) \Delta V_k = \iiint_{(V)} f(x_k; y_k; z_k) dV$$

wird (falls vorhanden) als Dreifachintegral bezeichnet.

## 1.6.1 Berechnung des Dreifachintegrals

### 1.6.1.1 In kartesischen Koordinaten

Wird ein Zylinder durch eine obere und untere Bildfläche ( Deckelfläche und Bodenfläche ) begrenzt, dann führt die Projektion dieser Flächen auf die x-y Ebene zu dem Projektionsbereich. Wird nun das Volumenelement  $dV$  mit dem Funktionswert multipliziert und über die Projektionsfläche und die Bildflächenbegrenzung integriert, dann erhält man das Dreifachintegral mit den Grenzen:

### Berechnung des Dreifachintegrals

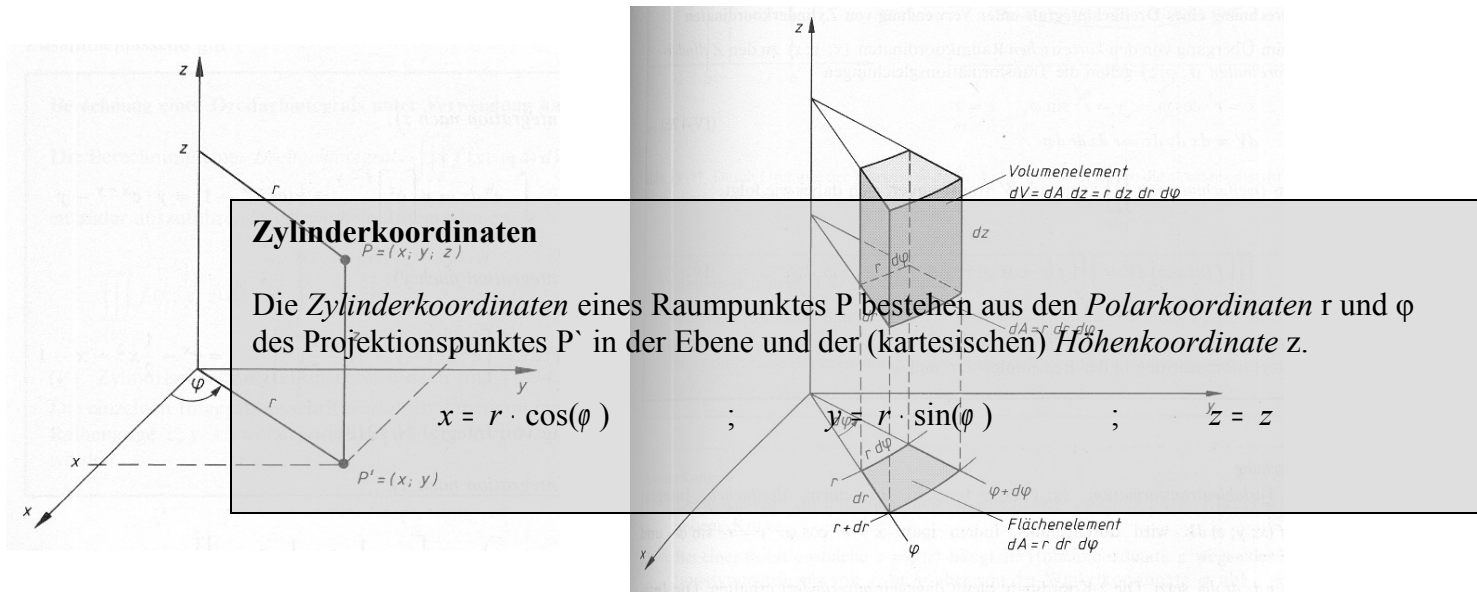
$$u = \int_{x=a}^b \int_{y=f_u}^{f_o} \int_{z=z_u}^{z_o} f(x; y; z;) dz dy dx$$

- a = Unter Grenze des Projektionsbereich
- b = Obere Grenze des Projektionsbereich
- $f_u$  = Untere Berandungskurve des Projektionsbereich
- $f_o$  = Obere Berandungskurve des Projektionsbereich
- $z_u$  = Untere Begrenzungsfläche
- $z_o$  = Obere Begrenzungsfläche

### 1.6.1.2 In Zylinderkoordinaten

In Anwendungen bei denen es um Rotationskörper geht, kann das Rechnen sehr viel erleichtert werden, in dem man auf die Zylinderkoordinaten wechselt.





**Berechnung eines Dreifachintegrals in Zylinderkoordinaten**

Der Übergang von kartesischen Koordinaten in die Zylinderkoordinaten, führt zu folgendem Integral:

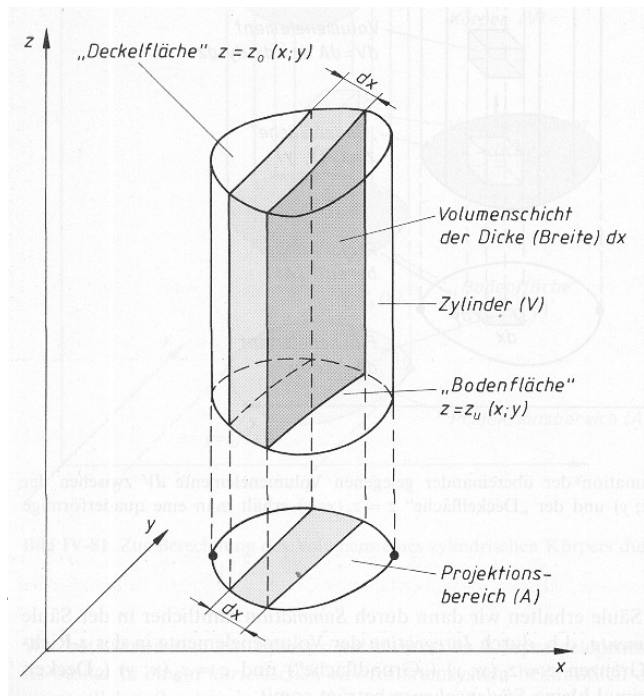
$$\iiint_{(V)} f(x; y; z) dV = \int_{\varphi = \varphi_1}^{\varphi_2} \int_{r = r_i}^{r_a} \int_{z = z_u}^{z_o} f(r \cos(\varphi); r \sin(\varphi); z) r dz dr d\varphi$$

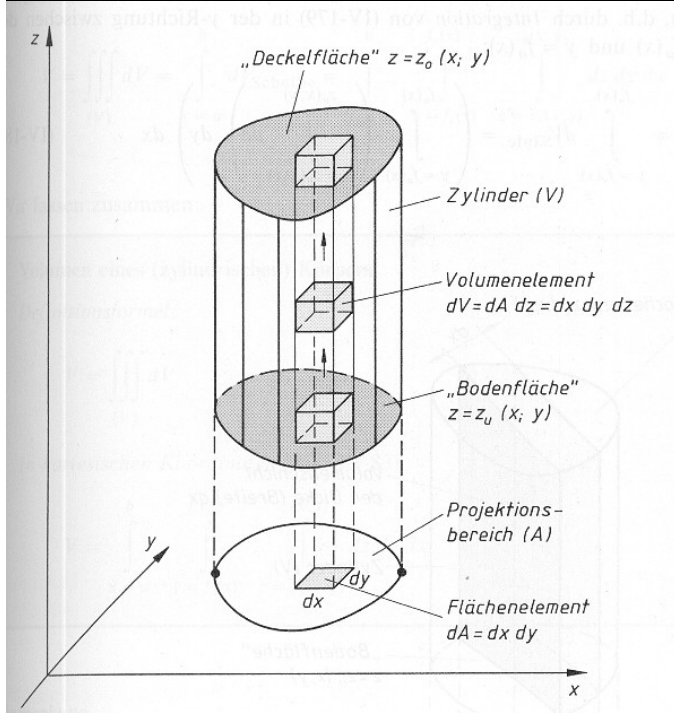
Wobei die Grenzen  $\varphi$  und  $r$  auf die Projektionsebene bezogen sind.

**1.6.2 Anwendungen des Dreifachintegrals**

**1.6.3 Volumen eines Körpers**

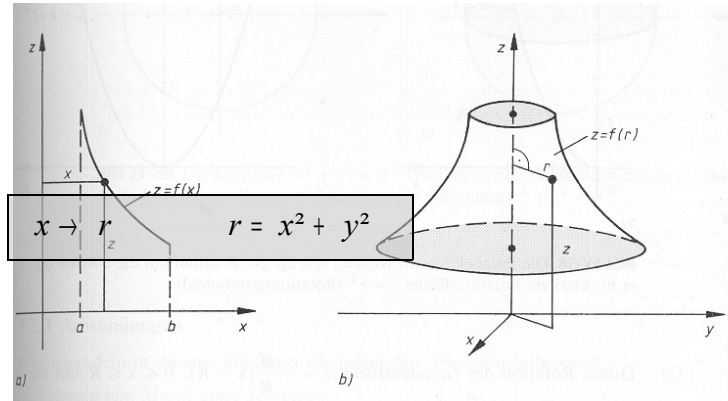
Integriert man das Volumenelement  $dV$  zwischen den Bildflächen, und den Grenzen der Projektionsfläche, dann erhält man das Volumen eines Körpers. Man könnte auch sagen, man setzt den Funktionswert  $u$  als konstant 1.





### 1.6.4 Funktionsgleichung einer Rotationsfläche

Durch Rotation einer Kurve  $z = f(x)$  um die  $z$ -Achse entsteht eine Rotationsfläche mit der Funktionsgleichung  $z = f(r)$ . Die Gleichung der Rotationsfläche erhält man dabei formal aus der Kurvengleichung mit Hilfe der Substitution.



### Volumen eines (zylindrischen) Körpers

Definitionsformel

Definitionsformel:

$$V = \int \int \int_{(V)} dV$$

$x_s = \frac{1}{V} \int \int \int_{(V)} x dV$  In kartesischen Koordinaten

$y_s = \frac{1}{V} \int \int \int_{(V)} y dV$  In Zylinderkoordinaten  $z_s = \frac{1}{V} \int \int \int_{(V)} z dV$

In kartesischen Koordinaten  $V = \int_{x=a}^b \int_{y=f_u}^{f_o} \int_{z=z_u}^{z_o} dz dy dx$

$V = \int_{\phi=\phi_1}^{\phi_2} \int_{r=r_i}^{r_a} \int_{z=z_u}^{z_o} r dz dr d\phi$

$x_s = \frac{1}{V} \int_{x=a}^b \int_{y=f_u}^{f_o} \int_{z=z_u}^{z_o} x dz dy dx$

$y_s = \frac{1}{V} \int_{x=a}^b \int_{y=f_u}^{f_o} \int_{z=z_u}^{z_o} y dz dy dx$

### 1.6.5 Schwerpunkt eines homogenen Körpers

$$z_s = \frac{1}{V} \int_{x=a}^b \int_{y=f_u}^{f_o} \int_{z=z_u}^{z_o} z dz dy dx$$

In Zylinderkoordinaten

Gilt für den auf der Rotationsachse ( $z$ -Achse) liegenden Schwerpunkt:

$x_s = 0$  ;  $y_s = 0$  ;  $z_s = \frac{1}{V} \int_{\phi=\phi_1}^{\phi_2} \int_{r=r_i}^{r_a} \int_{z=z_u}^{z_o} z r dz dr d\phi$

## 2 Skalar- und Vektorfelder

### Skalarfeld

Ein *Skalarfeld* ordnet den Punkten eines ebenen oder räumlichen Bereiches in eindeutiger Weise einen *Skalar* zu.

*Ebenes Skalarfeld :*

$$\phi = \phi(x; y)$$

*Räumliche Skalarfeld :*

$$\phi = \phi(x; y; z)$$

### Vektorfeld

Ein *Vektorfeld* ordnet den Punkten eines ebenen oder räumlichen Bereiches in eindeutiger Weise einen *Vektor* zu.

*Ebenes Vektorfeld :*

$$\vec{F}(x; y) = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix}$$

*Räumliches Vektorfeld :*

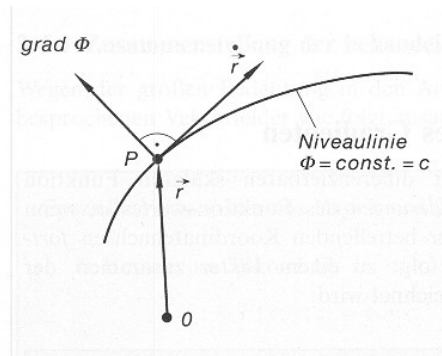
$$\vec{F}(x; y; z) = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{pmatrix}$$

## 2.1 Gradient eines Skalarfeldes

Unter dem Gradient eines differenzierbaren Skalarfeldes versteht man den aus den partiellen Ableitungen gebildeten Vektor. Der Gradient ist die Änderungsrate (Anstieg) der Kurve, bei Durchlaufung eines Punktes.

*Eigenschaft: Er steht senkrecht auf den Niveaulinien von  $\phi$  und zeigt in die Richtung des größten Zuwachses von  $\phi$ .*

$$\text{grad } \phi = \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} \\ \frac{\partial \phi}{\partial z} \end{pmatrix}$$



### Rechenregeln für Gradienten

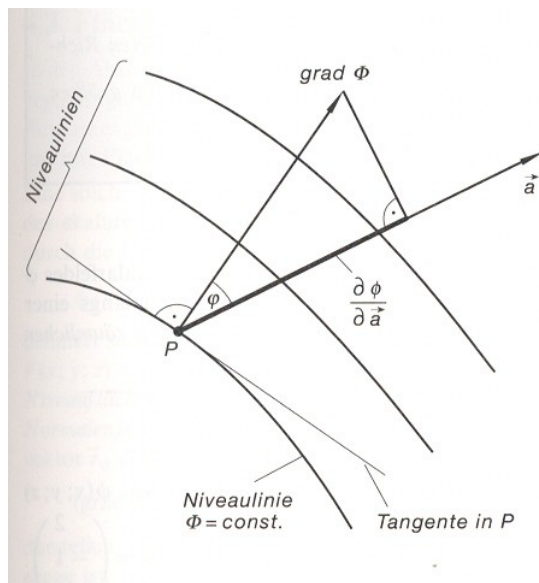
$\phi$  und  $\psi$  sind skalare Felder,  $c$  eine Konstante:

- (1)  $\text{grad } c = 0$
- (2)  $\text{grad } (c \phi) = c (\text{grad } \phi)$
- (3)  $\text{grad } (\phi + \psi) = \text{grad } \phi + \text{grad } \psi$
- (4)  $\text{grad } (\phi + c) = \text{grad } \phi$
- (5)  $\text{grad } (\phi \cdot \psi) = \phi (\text{grad } \psi) + \psi (\text{grad } \phi)$

## 2.2 Richtungsableitung

Häufig interessiert man sich für die Änderung des Funktionswertes einer skalaren Funktion, wenn man von einem Punkt P aus in einer bestimmten Richtung fortschreitet. Die Fortschrittingsrichtung wird meist durch einen sog. Richtungsvektor  $a$  festgelegt. Durch Normierung erhält man daraus den Einheitsvektor  $\vec{e}_a = \frac{1}{|a|} a$ , der die gleiche Richtung besitzt wie der Richtungsvektor. Die Komponente des Gradienten von  $\phi$  in Richtung dieses Einheitsvektors wird dann als Richtungsableitung des Skalarfeldes  $\phi$  in Richtung des Vektors  $a$  bezeichnet und durch das Symbol  $\frac{\partial \phi}{\partial a}$  gekennzeichnet.

Die Richtungsableitung ist also die Projektion des Gradienten von  $\phi$  auf den normierten Richtungsvektor, und somit eine skalare Größe. Sie gibt die Änderung des Funktionswertes von  $\phi$  an, wenn man von einem Punkt P aus in Richtung des Vektors  $\vec{a}$  um eine Längeneinheit fortschreitet.



$$\frac{\partial \phi}{\partial \vec{a}} = \frac{1}{|\vec{a}|} \cdot (\text{grad } \phi) \cdot \vec{a}$$

## 2.3 Divergenz

Herleitung siehe Papula Seite 71 Band 3

### Divergenz

Unter der Divergenz eines Vektorfeldes  $F$  versteht man das skalare Feld:

$$\text{div } F = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}$$

### Deutung:

$\text{div } F > 0$ : Im Volumenelement befindet sich eine Quelle.

$\text{div } F < 0$ : Im Volumenelement befindet sich eine Senke.

$\text{div } F = 0$ : Im Volumenelement befindet sich weder eine Quelle noch eine Senke, das Vektorfeld ist an dieser Stelle quellenfrei.

I

**Rechenregeln für Divergenzen**

$\vec{A}$  und  $\vec{B}$  sind *Vektorfelder*,  $\phi$  ist ein *Skalarfeld*,  $\vec{a}$  ist ein *konstanter Vektor* und  $c$  eine *Konstante*:

- (1)  $\operatorname{div} \vec{a} = 0$  (I-156)
- (2)  $\operatorname{div}(\phi \vec{A}) = (\operatorname{grad} \phi) \cdot \vec{A} + \phi(\operatorname{div} \vec{A})$  (I-157)
- (3)  $\operatorname{div}(c \vec{A}) = c(\operatorname{div} \vec{A})$  (I-158)
- (4)  $\operatorname{div}(\vec{A} + \vec{B}) = \operatorname{div} \vec{A} + \operatorname{div} \vec{B}$  (I-159)
- (5)  $\operatorname{div}(\vec{A} + \vec{a}) = \operatorname{div} \vec{A}$  (I-160)

**2.4 Rotation eines Vektorfeldes**

Unter der Rotation eines Vektorfeldes, versteht man das Vektorfeld:

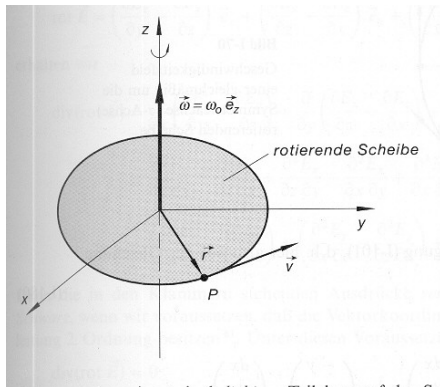
$$\vec{\operatorname{rot}} F = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z} \\ \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \end{pmatrix}$$

**Rechenregeln für Rotationen**

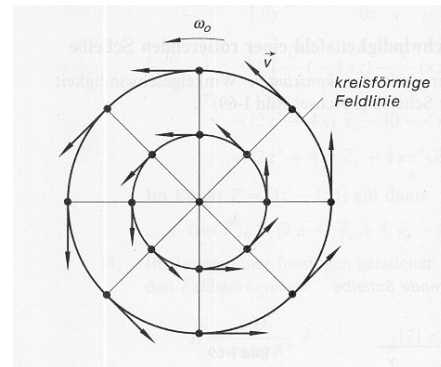
$\vec{A}$  und  $\vec{B}$  sind *Vektorfelder*,  $\phi$  ist ein *Skalarfeld*,  $\vec{a}$  ist ein *konstanter Vektor* und  $c$  eine *Konstante*:

- (1)  $\operatorname{rot} \vec{a} = \vec{0}$  (I-172)
- (2)  $\operatorname{rot}(\phi \vec{A}) = (\operatorname{grad} \phi) \times \vec{A} + \phi(\operatorname{rot} \vec{A})$  (I-173)
- (3)  $\operatorname{rot}(c \vec{A}) = c(\operatorname{rot} \vec{A})$  (I-174)
- (4)  $\operatorname{rot}(\vec{A} + \vec{B}) = \operatorname{rot} \vec{A} + \operatorname{rot} \vec{B}$  (I-175)
- (5)  $\operatorname{rot}(\vec{A} + \vec{a}) = \operatorname{rot} \vec{A}$  (I-176)

Beispiel:



daraus wird



## 2.5 Differentialoperator „Nabla“

### Nabla $\nabla$

Definition:

$$\nabla = \vec{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z}$$

Anwendung:

*Gradient*  $\text{grad } \phi = \nabla \phi$

*Divergenz*  $\text{div } F = \nabla \cdot F$

*Rotation*  $\text{rot } F = \nabla \times F$

## 2.6 Eigenschaften von bestimmten Feldern

**Eigenschaften eines quellenfreien Vektorfeldes**

Ein *quellenfreies* Vektorfeld  $\vec{F}$  läßt sich stets als *Rotation* eines Vektorfeldes  $\vec{E}$  darstellen:

$$\operatorname{div} \vec{F} = 0 \Rightarrow \vec{F} = \operatorname{rot} \vec{E} \tag{I-190}$$

$\vec{E}$  heißt *Vektorpotential* und ist bis auf den Gradienten einer skalaren Funktion  $\phi$  eindeutig bestimmt.

Umgekehrt ist ein *Wirbelfeld*  $\vec{F} = \operatorname{rot} \vec{E}$  stets *quellenfrei*:

$$\vec{F} = \operatorname{rot} \vec{E} \Rightarrow \operatorname{div} \vec{F} = \operatorname{div}(\operatorname{rot} \vec{E}) = 0 \tag{I-191}$$

**Eigenschaften eines wirbelfreien Vektorfeldes**

Ein *wirbelfreies* Vektorfeld  $\vec{F}$  läßt sich stets als *Gradient* eines skalaren Feldes  $\phi$  darstellen:

$$\operatorname{rot} \vec{F} = \vec{0} \Rightarrow \vec{F} = \operatorname{grad} \phi \tag{I-198}$$

Umgekehrt ist ein *Gradientenfeld*  $\vec{F} = \operatorname{grad} \phi$  stets *wirbelfrei*:

$$\vec{F} = \operatorname{grad} \phi \Rightarrow \operatorname{rot} \vec{F} = \operatorname{rot}(\operatorname{grad} \phi) = \vec{0} \tag{I-199}$$

### 3 Linien und Kurvenintegrale

#### 3.1 Herleitung des Arbeitsintegrals

Wird ein Massepunkt längs eines Weges gegen eine konstante Kraft verschoben, so wird eine Arbeit verrichtet.

*Arbeit ist Kraft ( in Wegrichtung ) mal Weg*

The left diagram shows a horizontal axis labeled  $s$ . A force vector  $\vec{F}$  originates from a point on the axis and points upwards and to the right. The angle between  $\vec{F}$  and the horizontal axis is labeled  $\varphi$ . A displacement vector  $\vec{s}$  is shown along the axis from the origin to a point further right.

The right diagram shows a horizontal axis labeled  $s$  with points  $s_1$  and  $s_2$  marked. A force vector  $\vec{F}(s)$  originates from a point  $s$  on the axis and points upwards and to the right. A smaller force vector  $\vec{F}_s(s)$  is shown along the axis from  $s$  to  $s + ds$ , representing an infinitesimal displacement  $d\vec{s}$ .

$$W = \vec{F} \cdot \vec{s} = F \cdot s \cdot \cos(\varphi)$$

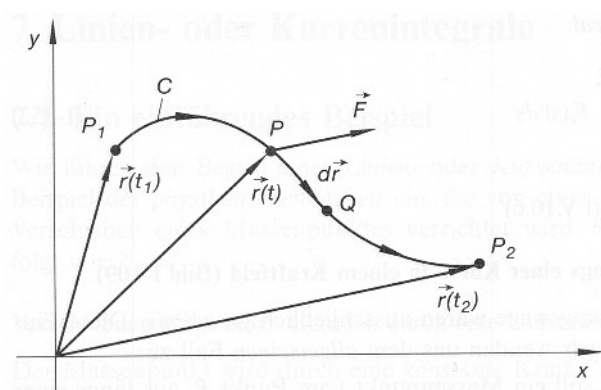
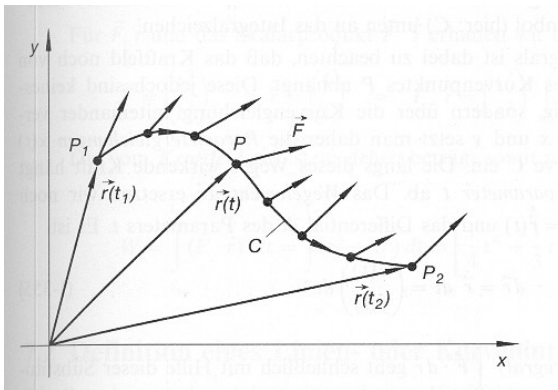
Ist nun die Kraft von Punkt zu Punkt verschieden, dann ist die Summe aus allen infinitesimal kleinen Verschiebungen des Massepunktes um  $d\vec{s}$  die Arbeit.

$$W = \int_{s_1}^{s_2} \vec{F}(s) \cdot d\vec{s} = \int_{s_1}^{s_2} F_{s(s)} ds$$



**Allgemeiner Fall**

Wird ein Massepunkt auf einer Kurve ( C ) durch ein sich veränderndes Kraftfeld bewegt, dann gibt die Summe aus den jeweiligen infinitesimalen kleinen Skalarprodukten von Kraftvektor mal Änderungs Ortsvektor (  $d\vec{r}$  ), die zu verrichtende Arbeit.



**Linien oder Kurvenintegral**

$$W = \int_{P_1}^{P_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

**3.2 Berechnung des Linien oder Kurvenintegrals**

Schema 1)

$$W = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{r} \quad \Rightarrow \quad d\vec{r} = \vec{r} dt$$

$$W = \int_C \vec{F} \cdot \vec{r} dt$$

Das Integral wird hergeleitet, der Ortsvektor wird in von t bestimmenden Vektor umgewandelt. Das Skalare Produkt von Kraftvektor (welcher nun auch von t abhängt) und der Ableitung des Ortsvektors wird über die Zeit integriert.

Schema 2)

$$W = \int_C F \, dr$$

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix} \quad ; \quad \vec{dr} = \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \vec{F} \cdot \vec{dr} = F_1 dx + F_2 dy$$

$$W = \int_C (F_1 dx + F_2 dy)$$

Nun wird die Wegfunktion (y Komponente) nach x abgeleitet, damit man dy durch einen Ausdruck mit dx ersetzen kann.

Schema 3)

$$W = \int_C F \, dr$$

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{pmatrix} \quad ; \quad \vec{dr} = \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \vec{F} \cdot \vec{dr} = F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz$$

$$W = \int_C (F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz)$$

Die Komponenten des Ortsvektors werden nach  $t$  abgeleitet. Die  $dx..dz$  Ausdrücke werden durch  $dt$  Ausdrücke ersetzt. Das Integral wird nach  $dt$  entwickelt.

### **Berechnung des Linienintegrals**

#### **Schema A)**

*Den Ortsvektor nach der Zeit ableiten, und über  $dt$  integrieren.*

#### **Schema B)**

*Aufspaltung der Vektoren und ersetzen von  $dy$  durch  $dx$  mit anschließender Integration nach  $dx$ .*

#### **Schema C)**

*Aufspaltung der Vektoren und durch ableiten der Komponenten nach der Zeit,  $dx - dz$  durch Ausdrücke von  $dt$  ersetzen.*

### 3.3 Wegunabhängigkeit eines Kurvenintegral

Ein Vektorfeld heißt *konservativ* oder ein Potentialfeld, wenn das Linien oder Kurvenintegral nur vom *Anfangs und Endpunkt*, nicht aber vom eingeschlagenen Verbindungsweg  $C$  der beiden Punkte abhängt. Die Wegunabhängigkeit eines Linienintegrals bedeutet also, dass das Vektorfeld als Gradient einer Potentialfunktion darstellbar ist. Also darf das Vektorfeld keine Wirbel enthalten ( $\text{rot}F = 0$ ).

#### Wegunabhängigkeit

*notwendige und Hinreichende Bedingung*

$$\text{rot } F = 0 \Rightarrow \frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x} ; \frac{\partial F_1}{\partial z} = \frac{\partial F_3}{\partial x} ; \frac{\partial F_2}{\partial z} = \frac{\partial F_3}{\partial y}$$

$$\Rightarrow F = \text{grad } \phi = \frac{\partial \phi}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial \phi}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial \phi}{\partial z} \vec{e}_z$$

$$\Rightarrow F_1 = \frac{\partial \phi}{\partial x} ; F_2 = \frac{\partial \phi}{\partial y} ; F_3 = \frac{\partial \phi}{\partial z}$$

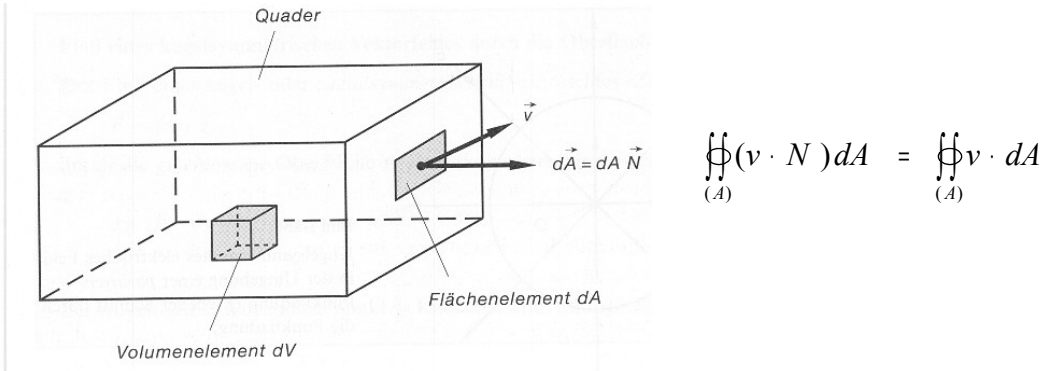
$$\Rightarrow \int d\phi = \int F_1 dx \Rightarrow \phi = \phi_{(\text{Stammfunktion nach } x)} + k_{(y;z)}$$

$k_{(y;z)}$  wird durch Partielles Ableiten der Potentialfunktion bestimmt.

### 3.4 Integralsätze von Gauß u. Stoke

#### 3.4.1 Gaußscher Integralsatz im Raum

Bringt man einen Quader in ein Strömungsfeld (Vektorfeld, Geschwindigkeit), dann ergibt der Gesamtfluss durch die geschlossene Hülle ( Oberfläche des Quaders ) pro Zeiteinheit das Oberflächenintegral:



Betrachtet man die Flüssigkeitsmenge, die in dem quaderförmigen Bereich durch die dortigen Quellen und Senken erzeugt oder vernichtet wird, dann fällt auf, dass die Summe ( Integral) über das Volumen, gleich der Menge ist, welche durch die Oberfläche tritt ( konstante Dichte).

$$\oiint_{(A)} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{A} = \iiint_{(V)} \text{div } \mathbf{v} \cdot dV$$

Bemerkung: Ist das Integral 0, dann fließt genauso viel rein, wie raus.

**Gaußscher Integralsatz im Raum**

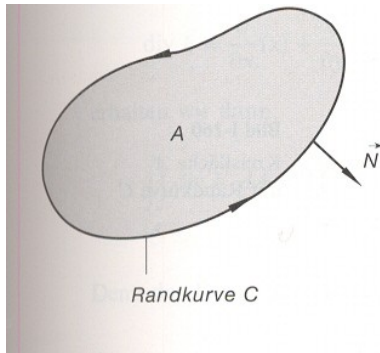
Das *Oberflächenintegral* eines Vektorfeldes  $F$  über eine geschlossene Fläche  $A$  ist gleich dem *Volumenintegral* der Divergenz von  $F$ , erstreckt über das von der Fläche  $A$  eingeschlossene Volumen  $V$ :

$$\oiint_{(A)} (F \cdot N) dA = \oiint_{(A)} F \cdot dA = \iiint_{(V)} \text{div } F dV$$

$F$  : Stetige differenzierbares Vektorfeld  
 $A$  : Geschlossene Oberfläche die das Volumen  $V$  einschließt  
 $V$  : Volumen  
 $N$  : Nach außen gerichtete Flächennormale

### 3.4.2 Gaußscher Integralsatz in der Ebene

Der Integralsatz des Raumes gilt auch sinngemäß in der Ebene:

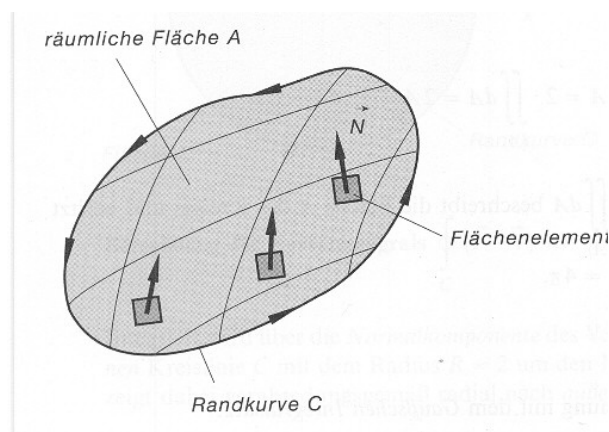


#### Gaußscher Integralsatz in der Ebene

$$\oint_C (F \cdot N) ds = \iint_{(A)} \operatorname{div} F dA$$

- $F$  : ebenes Vektorfeld
- $A$  : Ebenes Flächenstück
- $N$  : Nach außen gerichtete Kurvennormale
- $ds$  : Linienelement der Randkurve

### 3.4.3 Stokes'scher Integralsatz



#### Stokes'scher Integralsatz

Das Kurven oder Linienintegral eines Vektorfeldes  $F$  längs einer einfach geschlossenen Kurve  $C$  ist gleich dem Oberflächenintegral der Rotation von  $F$  über eine beliebige Fläche  $A$ , die durch die Kurve  $C$  berandet wird.

$$\oint_C F dr = \iint_{(A)} (\operatorname{rot} F) dA = \iint_{(A)} (\operatorname{rot} F) N dA$$

## 4 Komplexe Zahlen und Funktionen

### 4.1 Definition

#### 4.1.1 imaginäre Einheit

##### **imaginäre Einheit**

Der formale Wurzelausdruck  $\sqrt{-1}$  heißt *imaginäre Einheit* und wird durch das Symbol  $j$  gekennzeichnet:

$$j = \sqrt{-1}$$

Das Quadrat der imaginären Einheit  $j$  ist die reelle Zahl  $-1$ :

$$j^2 = -1$$

#### 4.1.2 imaginäre Zahl

**imaginäre Zahl**

Unter einer *imaginären Zahl*  $bj$  versteht man das formale Produkt aus der reellen Zahl  $b \neq 0$  und der imaginären Einheit  $j$ .

**4.1.3 komplexe Zahl**

**komplexe Zahl**

Unter einer *komplexen Zahl*  $z$  versteht man die formale Summe aus einer reellen Zahl  $x$  und einer imaginären Zahl  $jy$ :

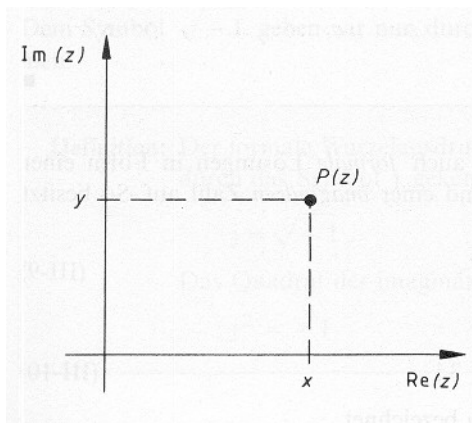
$$\underline{z} = x + jy$$

$$C = \{ \underline{z} \mid \underline{z} = x + jy ; a, b \in R, j^2 = -1 \}$$

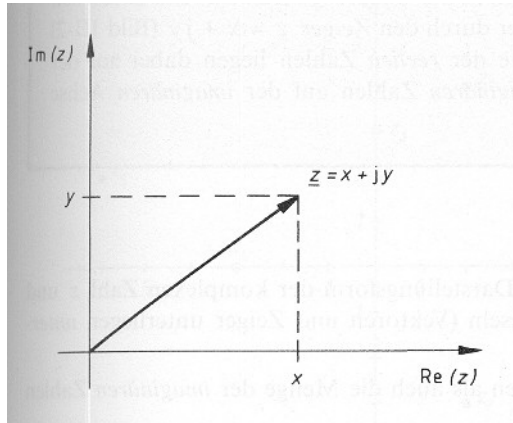
**4.2 Die Gaußsche Zahlenebene**

Eine *komplexe Zahl* lässt sich in der Gaußschen Zahlenebene durch einen *Bildpunkt*  $P(z) = (x ; y)$  oder durch einen *Zeiger*  $\underline{z} = x + jy$  geometrisch darstellen. Die Bildpunkte der reellen Zahlen liegen dabei auf der reellen Achse, die Bildpunkte der imaginären Zahl auf der imaginären Achse.

**Punktdarstellung**



**Zeigerdarstellung**



## 4.3 Grundbegriffe

### 4.3.1 Gleichheit zweier komplexen Zahlen

#### Gleichheit zweier komplexen Zahlen

Zwei komplexe Zahlen sind *gleich*, wenn sie in ihrem Real und ihrem Imaginärteil übereinstimmen. Die zugehörigen Bildpunkte bzw. Zeiger fallen dann zusammen

$$x_1 + jy_1 = z_1 = z_2 = x_2 + jy_2$$

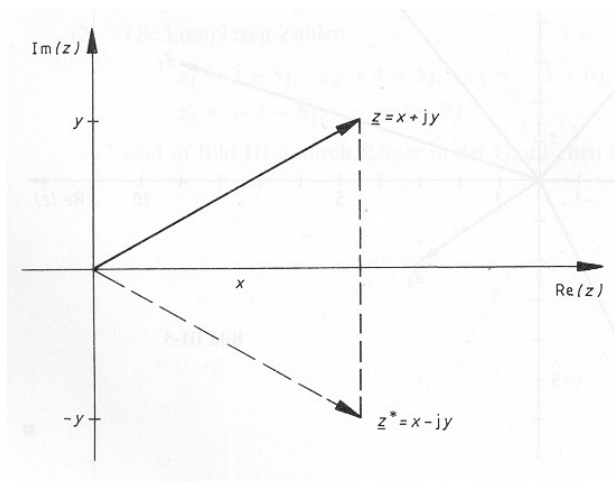
wenn

$$x_1 = x_2 \text{ und } y_1 = y_2$$

### 4.3.2 Konjugierte komplexe Zahl

Der Übergang von der komplexen Zahl  $z$  zur konjugiert komplexen Zahl  $z^*$  bedeutet einen Vorzeichenwechsel im Imaginärteil, während der Realteil unverändert bleibt.

$$\operatorname{Re}\{z^*\} = \operatorname{Re}\{z\} \quad ; \quad \operatorname{Im}\{z^*\} = -\operatorname{Im}\{z\}$$



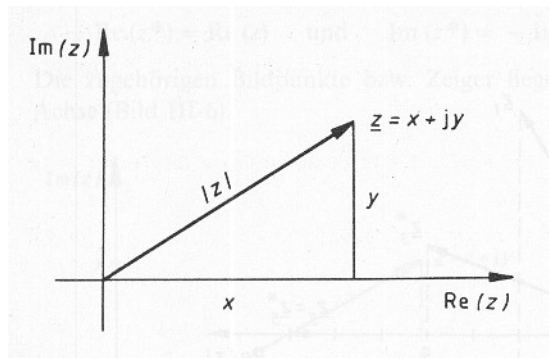
#### Konjugierte komplexe Zahl

$j$  wird durch  $-j$  ersetzt



### 4.3.3 Betrag einer komplexen Zahl

Unter dem Betrag  $|\underline{z}|$  der komplexen Zahl  $z = x + jy$  versteht man die Länge des zugehörigen Zeigers.



#### Betrag einer komplexen Zahl

$$|\underline{z}| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

## 4.4 Darstellungsformen einer komplexen Zahl

### 4.4.1 Kartesische oder Normal Form

#### Kartesische oder Normal Form

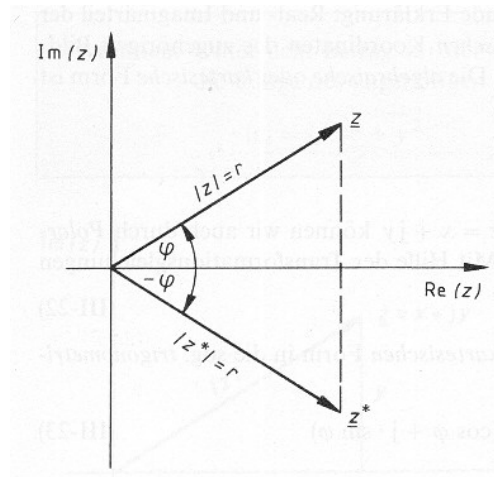
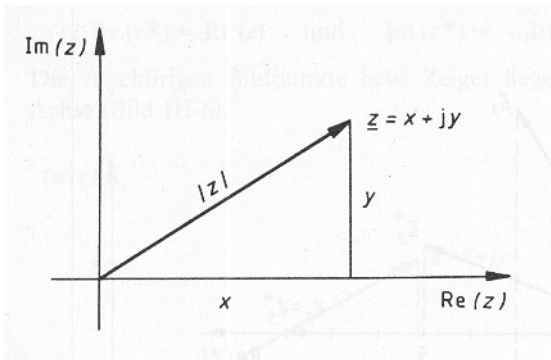
$$\underline{z} = x + jy$$

### 4.4.2 Polarform

Den Bildpunkt der komplexen Zahl kann auch durch Polarkoordinaten dargestellt werden.

$$x = |\underline{z}| \cdot \cos(\varphi) \quad ; \quad y = |\underline{z}| \cdot \sin(\varphi)$$





### Polarform

$$\underline{z} = |\underline{z}| \cdot (\cos(\varphi) + j \sin(\varphi))$$

$$\underline{z}^* = |\underline{z}| \cdot (\cos(\varphi) - j \sin(\varphi))$$

### 4.4.3 Exponentialform

Die Eulersche Formel wird über die Reihenentwicklung nach Taylor bewiesen.  
Euler sagt:

$$r \cdot e^{j\varphi} = r \cdot (\cos(\varphi) + j \sin(\varphi))$$

Taylorreihe:

$$f_{(x)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f_{(x_0)}^{(n)}}{n!} \cdot (x - x_0)^n \quad \text{mit } x_0 = 0$$

$$\begin{array}{ll}
 f_{(x)} = r \cdot e^{jx} & ; & f_{(0)} = r \\
 f'_{(x)} = r \cdot e^{jx} \cdot j & ; & f'_{(0)} = r \cdot j \\
 f''_{(x)} = -r \cdot e^{jx} & ; & f''_{(0)} = -r \\
 f'''_{(x)} = -r \cdot e^{jx} \cdot j & ; & f'''_{(0)} = -r \cdot j \\
 f^4_{(x)} = r \cdot e^{jx} & ; & f^4_{(0)} = r
 \end{array}$$

$$f_{(x)} = \frac{r}{0!} \cdot x^0 + \frac{r \cdot j}{1!} \cdot x^1 - \frac{r}{2!} \cdot x^2 - \frac{r \cdot j}{3!} \cdot x^3 + \frac{r}{4!} \cdot x^4 \dots$$

$$f_{(x)} = r \cdot \left( \frac{1}{0!} \cdot x^0 - \frac{1}{2!} \cdot x^2 + \frac{1}{4!} \cdot x^4 \dots + j \left( \frac{1}{1!} \cdot x^1 - \frac{1}{3!} \cdot x^3 \dots \right) \right)$$

$$f_{(x)} = r \cdot (\cos(x) + j \sin(x))$$

Da  $\varphi$   $2\pi$  periodisch ist gilt :

$$r \cdot (\cos(\varphi) + j \sin(\varphi)) = r e^{j(\varphi + k 2\pi)}$$

**Exponentialform**

$$r \cdot (\cos(\varphi) + j \sin(\varphi)) = r e^{j(\varphi + k 2\pi)} \quad k \in \mathbb{Z}$$

### 4.5 Rechenoperationen

Die Menge der Komplexen Zahlen bildet einen Körper !!!  
 Es gelten die gleichen Regeln wie bei den Reellen Zahlen. Aber es gibt ein Paar nützliche Rechenalgorithmen, welche das Leben sehr erleichtern.

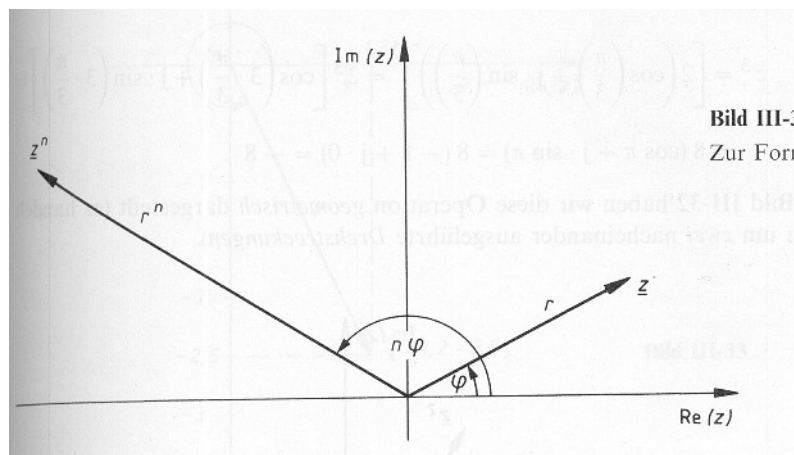
**4.5.1 Übersicht Grundrechenarten**

<b>Addition und Subtraktion</b>	Kartesisch
<b>Multiplikation</b>	Kartesisch, Exponentiell
<b>Division</b>	Kartesisch durch Kojugation, Exponentiell

## 4.5.2 Potenzieren

### Potenzieren

$$\underline{z}^n = r^n \cdot e^{jn\varphi} = r^n \cdot (\cos(n \cdot \varphi) + j \sin(n \cdot \varphi))$$



## 4.5.3 Radizieren

### Fundamentalsatz der Algebra

Eine algebraische Gleichung n-ten Grades

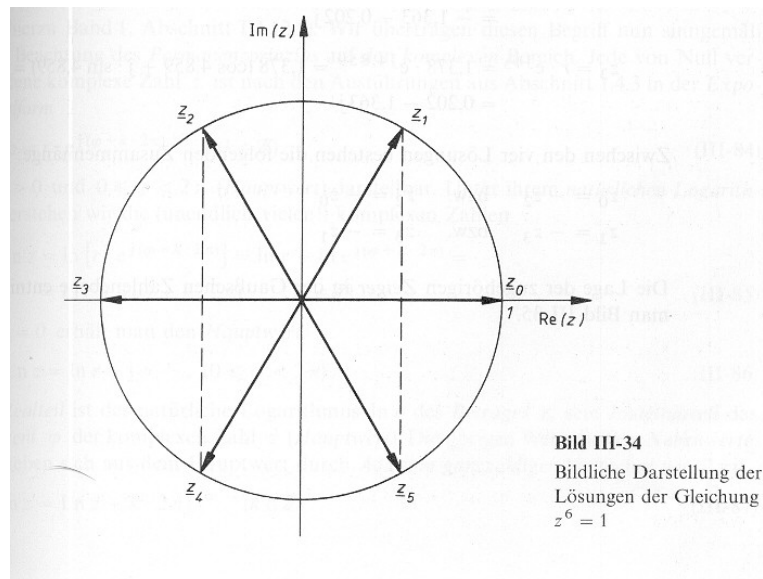
$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0 = 0$$

besitzt in der Menge  $\mathbb{C}$  der komplexen Zahlen stets genau  $n$  Lösungen.

Sind die Koeffizienten alle reell, dann treten komplexe Lösungen immer paarweise auf.

Eine komplexe Zahl  $\underline{z}$  heißt eine  $n$ -te Wurzel aus  $a$ , wenn sie der algebraischen Gleichung  $z^n = a$   $a \in \mathbb{C}$  genügt.

Die Berechnung erfolgt in der *Exponentialform*. Die Gesamtlösungsmenge erhält man, indem man  $k = 0$  bis  $k = n - 1$  laufen lässt, also  $n$  Lösungen.



#### 4.5.4 Logarithmieren

##### Natürlicher Logarithmus

Der natürliche Logarithmus einer komplexen Zahl  $\underline{z} = r \cdot e^{j(\varphi + k 2\pi)}$  ist unendlich vieldeutig.

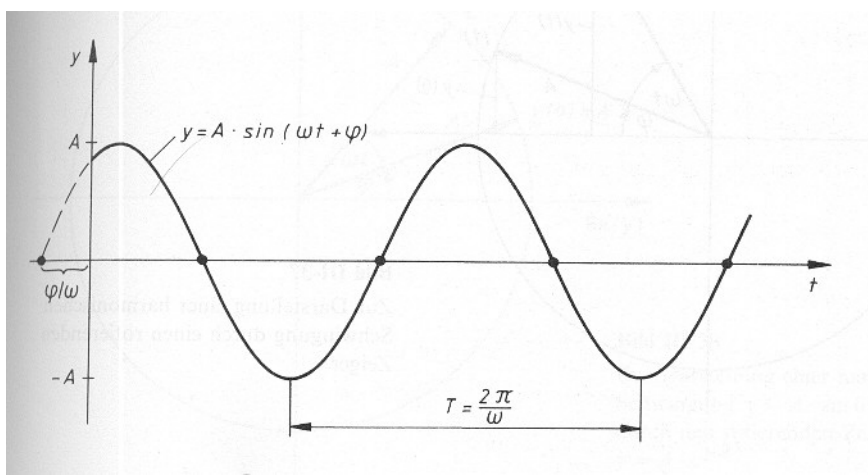
$$\ln \underline{z} = \ln r + j(\varphi + k 2\pi) \quad k \in \mathbb{Z}$$

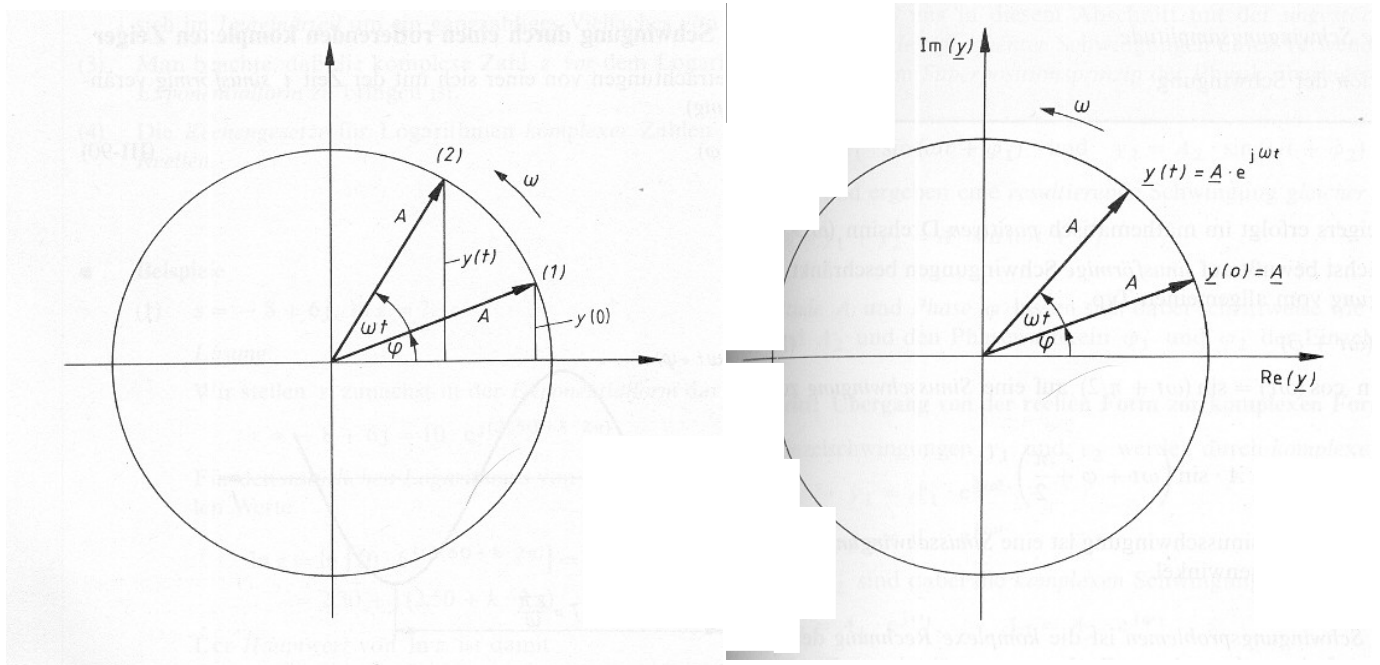
Der Hauptwert wird für  $k = 0$  angenommen, alle anderen Werte sind Nebenwerte.

$$\text{Ln } \underline{z} = \ln r + j \varphi$$

## 4.6 Anwendungen der komplexen Rechnung

### 4.6.1 Darstellung von Schwingungen im Zeigerdiagramm





$$\underline{y} = A \cdot (\cos(\omega t + \varphi) + j \sin(\omega t + \varphi))$$

$$\underline{y} = A \cdot e^{j(\omega t + \varphi)} = A \cdot e^{j\varphi} \cdot e^{j\omega t} = \underline{A} \cdot e^{j\omega t}$$

$\underline{A}$  = Komplexe Amplitude ;  $e^{j\omega t}$  = Zeitfunktion

**Darstellung einer Sinusschwingung durch einen rotierenden Zeiger**

Eine sich *sinusförmige* mit der Zeit t ändernde Größe

$$y = A \cdot \sin(\omega t + \varphi)$$

kann in symbolischer Form durch einen mit der Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  um den Nullpunkt der Gaußschen Zahlenebene rotierenden komplexen Zeiger

$$\underline{y} = A \cdot e^{j(\omega t + \varphi)} = \underline{A} \cdot e^{j\omega t}$$

dargestellt werden. Der Momentanwert der Schwingung entspricht dem Imaginärteil des rotierenden komplexen Zeigers  $\underline{y}$ .

$$y = \text{Im}\{\underline{y}\} = \text{Im}\{\underline{A} e^{j\omega t}\} = A \cdot \sin(\omega t + \varphi)$$



### 4.6.2 Ungestörte Überlagerung von Schwingungen gleicher Frequenz

**Überlagerung zweier gleichfrequenter sinusförmiger Schwingungen in komplexer Darstellung**

Durch *ungestörte Überlagerung* der *gleichfrequenten* Sinusschwingungen

$$y_1 = A_1 \cdot \sin(\omega t + \varphi_1) \quad \text{und} \quad y_2 = A_2 \cdot \sin(\omega t + \varphi_2) \quad (\text{III-106})$$

entsteht nach dem *Superpositionsprinzip* der Physik eine *resultierende* Schwingung mit der *gleichen* Frequenz:

$$y = y_1 + y_2 = A \cdot \sin(\omega t + \varphi) \quad (\text{III-107})$$

Die Berechnung der *Schwingungsamplitude*  $A$  und des *Phasenwinkels*  $\varphi$  erfolgt dabei im *Komplexen* in drei Schritten:

- 1. Übergang von der reellen Form zur komplexen Form**  
Die *Einzelschwingungen*  $y_1$  und  $y_2$  werden in *komplexer* Form dargestellt:  

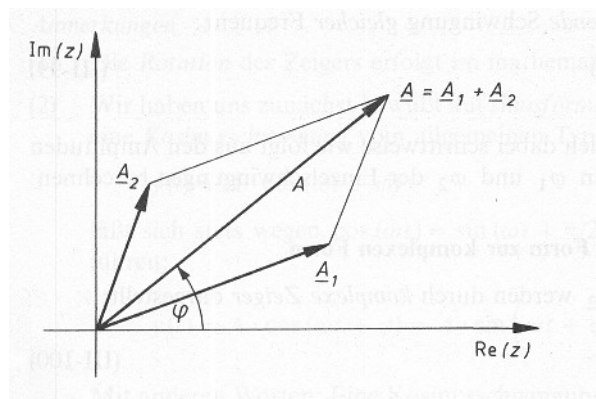
$$y_1 \rightarrow \underline{y}_1 = \underline{A}_1 \cdot e^{j\omega t} \quad (\text{III-108})$$

$$y_2 \rightarrow \underline{y}_2 = \underline{A}_2 \cdot e^{j\omega t}$$
- 2. Addition der komplexen Amplituden (Bild III-39)**  

$$\underline{A} = \underline{A}_1 + \underline{A}_2 \quad (\text{III-109})$$
 Die *resultierende* Schwingung lautet dann in *komplexer* Form:  

$$\underline{y} = \underline{y}_1 + \underline{y}_2 = \underline{A} \cdot e^{j\omega t} \quad (\text{III-110})$$
- 3. Rücktransformation aus der komplexen Form in die reelle Form**  

$$y = y_1 + y_2 = \text{Im}(\underline{y}) = \text{Im}(\underline{A} \cdot e^{j\omega t}) = A \cdot \sin(\omega t + \varphi) \quad (\text{III-111})$$



### 4.6.3 Berechnung eines Wechselstromkreises

#### 4.6.3.1 Ohmsches Gesetz der Wechselstromtechnik

**Ohmsches Gesetz der Wechselstromtechnik**

$$\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \frac{\hat{u}}{\hat{i}}$$

$\underline{U}, \underline{I}$  : Effektivwerte ;  $\hat{u}, \hat{i}$  : Scheitelwerte

#### 4.6.3.2 Widerstandsoperatoren

Bei den folgenden Betrachtungen wird der Stromzeiger  $\underline{I}$  als Bezugszeiger in die positiv reelle Achse gelegt.

##### 4.6.3.2.1 Ohmscher Widerstand

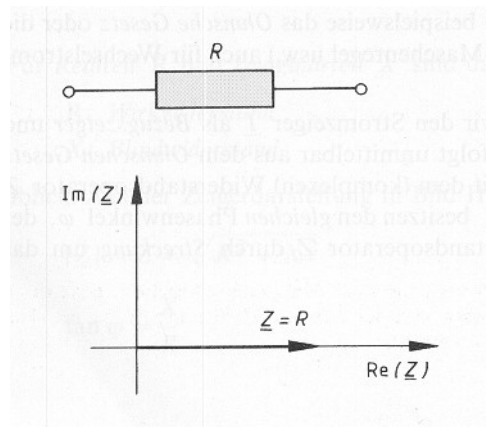
Es gilt:

$$u = R \cdot i \quad \Rightarrow \quad \underline{u} = R \cdot \underline{i}$$

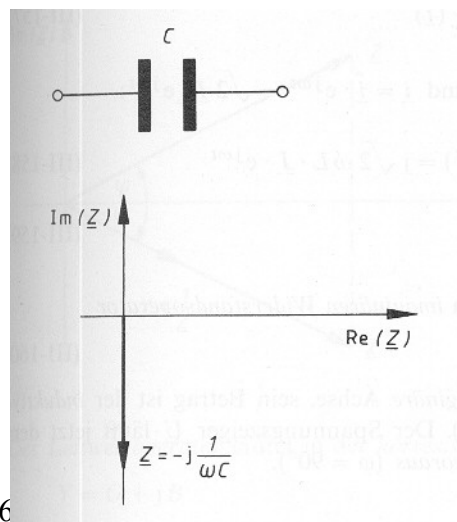
$$\underline{u} = \hat{u} \cdot e^{j\omega t} \quad ; \quad \underline{i} = \hat{i} \cdot e^{j\omega t}$$

$$\hat{u} = \underline{U} \sqrt{2} \quad ; \quad \hat{i} = \underline{I} \sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{U} = R \cdot \underline{I}$$



##### 4.6.3.2.2 Kapazität



$$\underline{q} = C \cdot \underline{u} \quad \Rightarrow \quad \underline{q} = C \cdot \underline{u}$$

$$\frac{d\underline{q}}{dt} = \underline{i} \quad \Rightarrow \quad \underline{i} = C \cdot \frac{d\underline{u}}{dt}$$

$$\underline{u} = \hat{u} \cdot e^{j\omega t} \quad ; \quad \underline{i} = \hat{i} \cdot e^{j\omega t}$$

$$\frac{d\underline{u}}{dt} = \hat{u} \cdot e^{j\omega t} \cdot j \cdot \omega$$

$$\hat{i} \cdot e^{j\omega t} = C \cdot \hat{u} \cdot e^{j\omega t} \cdot j \cdot \omega$$

$$\hat{u} = \underline{U} \sqrt{2} \quad ; \quad \hat{i} = \underline{I} \sqrt{2}$$

$$\underline{I} = C \cdot j\omega \underline{U} \quad \Rightarrow \quad \underline{Z} = -j \frac{1}{\omega C}$$

#### 4.6.3.2.3 Induktivitäten

$$\underline{u} = L \cdot \frac{d\underline{i}}{dt} \quad \Rightarrow \quad \underline{u} = L \frac{d\underline{i}}{dt}$$

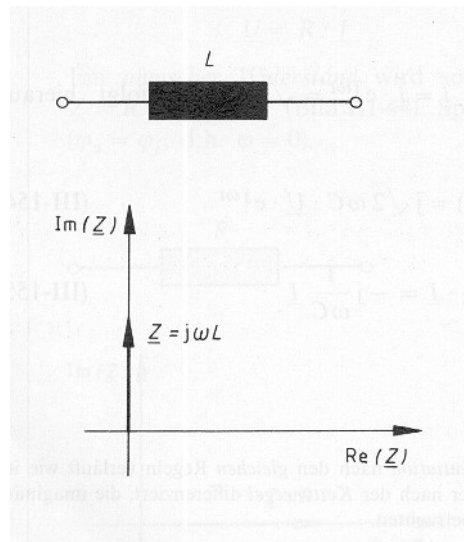
$$\underline{u} = \hat{u} \cdot e^{j\omega t} \quad ; \quad \underline{i} = \hat{i} \cdot e^{j\omega t}$$

$$\frac{d\underline{i}}{dt} = \hat{i} \cdot e^{j\omega t} \cdot j \cdot \omega$$

$$\underline{u} = L \cdot \hat{i} \cdot e^{j\omega t} \cdot j \cdot \omega$$

$$\hat{u} = \underline{U} \sqrt{2} \quad ; \quad \hat{i} = \underline{I} \sqrt{2}$$

$$\underline{U} = L \cdot \underline{I} \cdot j \cdot \omega \quad \Rightarrow \quad \underline{Z} = L \cdot j\omega$$

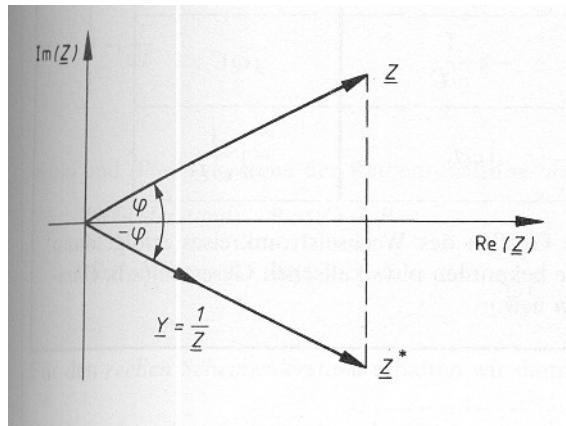


#### 4.6.3.2.4 Leitwertoperator

Der Kehrwert eines komplexen Widerstandes wird als Leitwertoperator bezeichnet.

Geometrisch erhält man den Leitwert durch Spiegelung des Widerstandesoperators an der reellen Achse

(  $\varphi \rightarrow -\varphi$  ) und anschließender Streckung um das  $\frac{1}{Z^2}$  fache (Länge  $\left| \frac{1}{Z} \right|$  ).



### 4.6.3.2.5 Übersicht

#### Berechnung eines Wechselstromkreises mit Hilfe von Widerstands- und Leitwertoperatoren

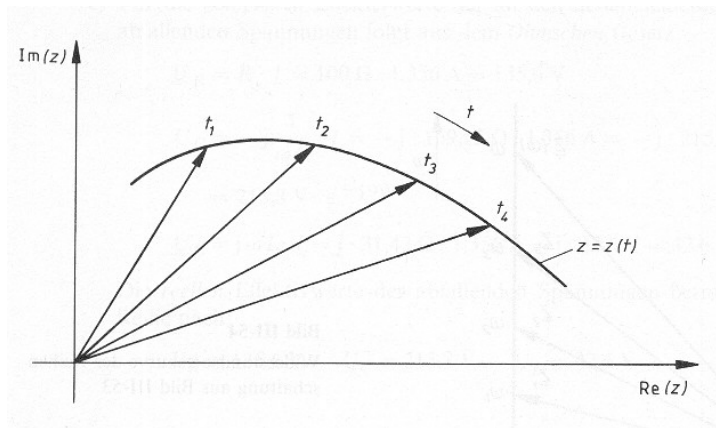
In einem Wechselstromkreis werden die Grundschaltelemente  $R$  (Ohmscher Widerstand),  $C$  (Kapazität) und  $L$  (Induktivität) wie folgt durch sog. Widerstands- bzw. Leitwertoperatoren, d.h. durch zeitunabhängige komplexe Zeiger dargestellt:

Schaltelement	Widerstandsoperator	Leitwertoperator
Ohmscher Widerstand $R$	$R$	$\frac{1}{R}$
Kapazität $C$	$-j \frac{1}{\omega C}$	$j \omega C$
Induktivität $L$	$j \omega L$	$-j \frac{1}{\omega L}$

Die Berechnung der elektrischen Größen des Wechselstromkreises erfolgt dann nach den aus der Gleichstromlehre bekannten physikalischen Gesetzen (z.B. Ohmsches Gesetz, Kirchhoffsche Regeln usw.).

### 4.6.4 Ortskurven

Die von einem reellen Parameter  $t$  abhängige komplexe Zahl  $\underline{z} = x_{(t)} + j y_{(t)}$  heißt eine komplexwertige Funktion  $z_{(t)}$  der reellen Variablen  $t$ .



**Orstkurve einer parameterabhängigen komplexen Zahl**

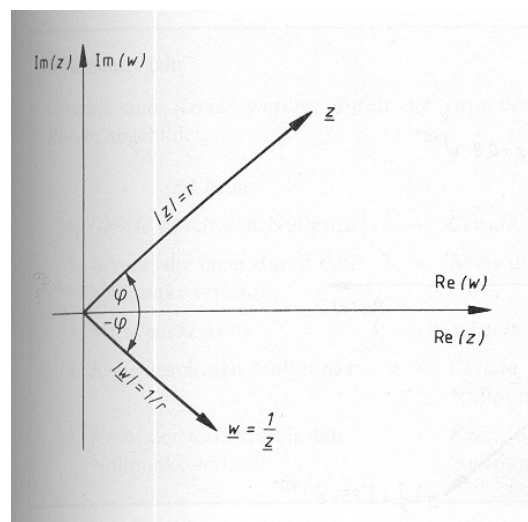
Die Ortskurve einer von einem reellen Parameter  $t$  abhängigen komplexen Zahl

$$z_{(t)} = x_{(t)} + j y_{(t)} \quad (a \leq t \leq b)$$

ist die Bahnkurve, die der zugehörige Zeiger  $\underline{z} = \underline{z}_{(t)}$  in der Gaußschen Zahlenebenen beschreibt, wenn der Parameter  $t$  das Intervall  $[a, b]$  durchläuft.

**4.6.4.1 Inversion**

Der Übergang von einer komplexen Zahl (Größe)  $z$  zu ihrem Kehrwert  $w = 1/z$  heißt Inversion.



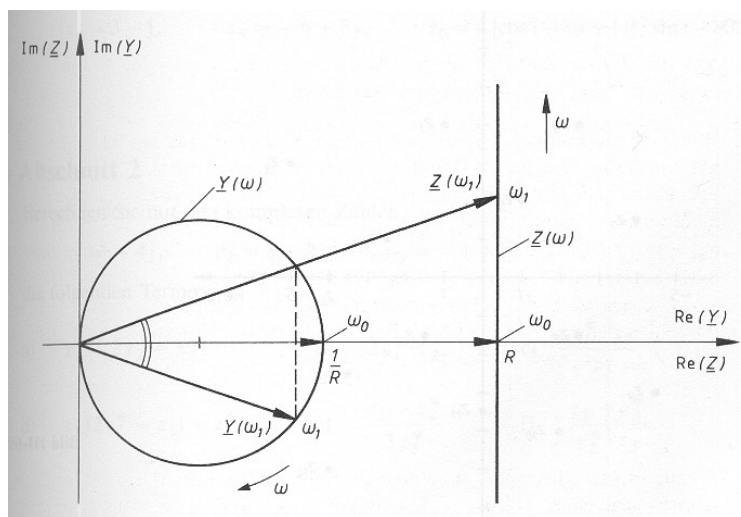
**Inversion einer komplexen Größe**

Die Inversion einer komplexen Zahl erfolgt in zwei Schritten:

1. Vorzeichenwechsel im Argument (Winkel)
2. Kehrwertbildung des Betrages von  $z$ .

<b>Inversionsregeln</b>	
Geraden und Kreise werden durch die Inversion $y = 1/z$ nach den folgenden Regeln abgebildet:	
z- Ebene	y-Ebene
1. Gerade durch den Nullpunkt	Gerade durch den Nullpunkt
2. Gerade, die nicht durch den Nullpunkt verläuft	Kreis durch den Nullpunkt
3. Mittelpunktskreis	Mittelpunktskreis
4. Kreis durch den Nullpunkt	Gerade, die nicht durch den Nullpunkt verläuft
5. Kreis, der nicht durch den Nullpunkt verläuft	Kreis, der nicht durch den Nullpunkt verläuft.

**Darstellung beider Zeiger in einem Diagramm**



4.6.4.2 Übersicht von Grundsaltungen – Ortskurven

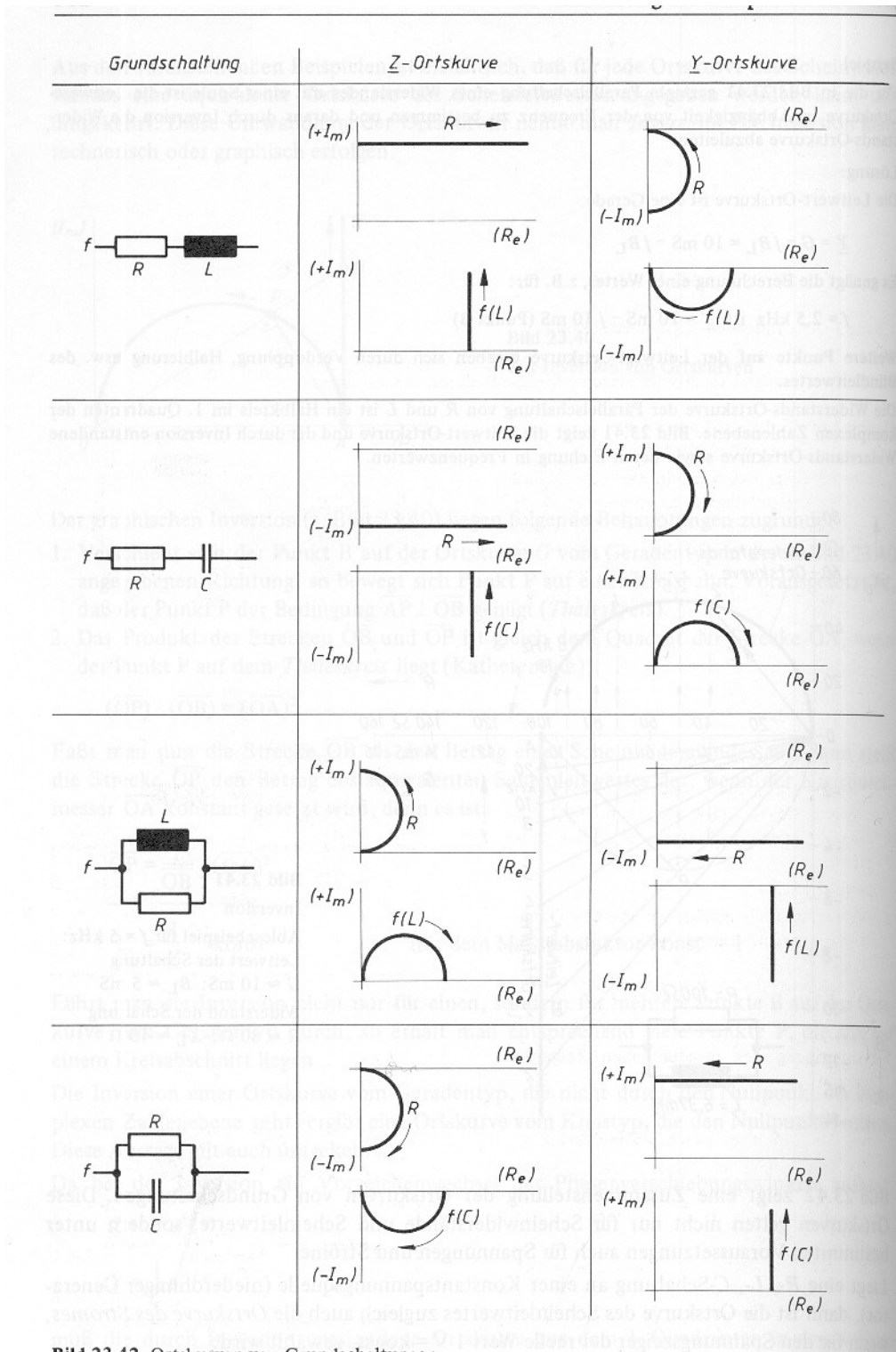


Bild 23.42 Ortskurven von Grundsaltungen

## 5 Differentialgleichungen

### 5.1 DGL 1. Ordnung

#### 5.1.1 Trennung der Variablen

##### 5.1.1.1 Direkt

Bei multiplikativen Verknüpfungen kann direkt nach den Integranden und Variablen umgestellt werden.

##### 5.1.1.2 Substitution

**Integration spezieller Differentialgleichungen 1. Ordnung durch Substitution**

Differentialgleichungen 1. Ordnung vom Typ

$$y' = f(ax + by + c) \quad (\text{Substitution: } u = ax + by + c) \quad (\text{V-22})$$

und

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right) \quad \left(\text{Substitution: } u = \frac{y}{x}\right) \quad (\text{V-23})$$

lassen sich mittels der jeweils in Klammern angegebenen *Substitution* schrittweise wie folgt lösen:

1. Durchführung der *Substitution*.
2. *Integration* der neuen Differentialgleichung 1. Ordnung für die Hilfsfunktion *u* durch *Trennung der Variablen*.
3. *Rücksubstitution* und *Auflösen* der Gleichung nach *y*.

##### 5.1.2 Variation der Konstanten

Dieses art des lösen geht fast immer, sie ist aber aufwendig.

1. Homogene Lösung bestimmen. ( Variation der Konstanten ).

$$y_h = C \cdot e^{\lambda x}$$

2. Die Konstante übergehen lassen in eine Funktion von x.

$$y_h \rightarrow y = C_{(x)} \cdot e^{\lambda x}$$

Durch Ableiten und Einsetzen die Funktion  $C_{(x)}$  bestimmen.



### 5.1.3 Ansatz einer partikulären Lösung

Vorraussetzung ist das die DGL **konstante Koeffizienten** aufweist.

$$ay' + by + c = s_{(x)}$$

Dann wird eine partikuläre Lösung von dem Typ des Störgliedes  $s_{(x)}$  gewählt. Es ist dabei auf Resonanz zu achten. Näheres im Ablaufdiagramm zum Schluss. Die Summe aus der partikulären und der Homogenen Lösung ist die Allgemeine Lösung der DGL.

$$y = y_h + y_p$$

### 5.1.4 Komplexer Ansatz

Durch den Übergang ins Komplexe lassen sich bei Trigonometrischen Störfunktionen die partikulären Lösungen leichter ermitteln als bei dem normalen Ansatz. ( Siehe DGL 2. Ordnung Komplexe Ansatz)

## 5.2 DGL 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Allgemeine Funktion:

$$y'' + ay' + by = s_{(x)}$$

### 5.3 Homogene Lösungsfindung

Ansatz:  $y_h = y_0 = e^{\lambda x} \Rightarrow y_0'' + ay_0' + by_0 = 0$

Durch Ableiten und ineinander Einsetzen erhält man die **Charakteristische Gleichung**.

$$\lambda^2 e^{\lambda x} + a\lambda e^{\lambda x} + b e^{\lambda x} = 0 \Rightarrow \lambda^2 + a\lambda + b = 0$$

$$\lambda_{1/2} = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a^2}{4} - b\right)}$$

**5.3.1 Fall 1**  $\lambda_1 \wedge \lambda_2 \in \mathbb{R} \quad \wedge \quad \lambda_1 \neq \lambda_2$  (Kriechfall)

$$\Rightarrow \quad \lambda_{01} = e^{\lambda_1 x} \quad \wedge \quad \lambda_{02} = e^{\lambda_2 x}$$

Da eine DGL Vektor Charakter besitzt, soll heißen sie bilden einen Körper, gibt eine Determinante darüber Aufschluss, ob die Ergebnisse voneinander abhängen. Diese wird Wronski –Determinante genannt. Ist sie ungleich null, sind die Lösungen linearunabhängig voneinander und somit Fundamentalbasen.

$$W = \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 x} & e^{\lambda_2 x} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 x} & \lambda_2 e^{\lambda_2 x} \end{vmatrix} = e^{\lambda_1 x} \cdot \lambda_2 e^{\lambda_2 x} - \lambda_1 e^{\lambda_1 x} \cdot e^{\lambda_2 x} \neq 0$$

$$\Rightarrow \quad y_{01} \quad \wedge \quad y_{02} \quad \text{sind Fundamentalbasen}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad y_{01} &\rightarrow y_{h1} = C_1 \cdot e^{\lambda_1 x} \\ y_{02} &\rightarrow y_{h2} = C_2 \cdot e^{\lambda_2 x} \end{aligned} \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow y_h = y_{h1} + y_{h2} = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$$

**5.3.2 Fall 2**  $\lambda_1 = \lambda_2$  (aperiodischer Grenzfall)

$$\Rightarrow \quad y_{01} = C \cdot e^{\lambda x}$$

$$\text{Variation der Konstanten:} \quad y_{01} \rightarrow y_h = C_{(x)} \cdot e^{\lambda x}$$

Durch Ableiten und einsetzen erhält ( siehe Anhang) man:

$$C_{(x)} = C_1 \cdot x + C_2 \quad \Rightarrow \quad y_h = (C_1 \cdot x + C_2) \cdot e^{\lambda x}$$

**5.3.3 Fall 3**  $\lambda_1 \wedge \lambda_2 \in \mathbb{C}$ 

Das Prinzip ist gleich dem im 1.Fall. Nur mit dem unterschied, dass sich die zum Schluss ergebende Lösung aus dem Realteil und dem Imaginär Teil zusammensetzt.

$$y_h = \text{Im}\{\underline{y}_h\} + \text{Re}\{\underline{y}_h\}$$

Im Anhang ist eine Genaue Ausführung.

## 5.4 Störgliedbetrachtung

### 5.4.1 Partikuläre Lösung

Der Ansatz erfolgt nach dem Typ der Störfunktion. Ist die Störfunktion zusammengesetzt aus elementaren Störfunktionen, so wird der Ansatz entsprechend dieser Verknüpfung gewählt. Wie schon bei der DGL 1.Ordnung ist die Summe aus Homogener Lösung und partikulären Lösung die Allgemeine Lösung.

### 5.4.2 Komplexer Ansatz

Er ist zweckmäßig bei einfachen Trigonometrischen Störfunktionen.

Beispiel:

$$s_{(x)} = a \sin(b x)$$

$$\underline{s}_{(x)} = a e^{jbx} \quad \text{mit} \quad s_{(x)} = \text{Im}\{\underline{s}_{(x)}\}$$

$$\Rightarrow y_p = \text{Im}\{\underline{y}_p\}$$

Die Bestimmung von  $\underline{y}_p$  läuft analog zu 5.4.1.

## 5.5 Schnellübersicht

