Grundlagen

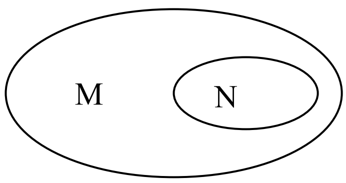
Mengen *(Georg Center ist der Begründer der Mengenlehre. / 1845 – 1916)*

Eine **<u>Menge</u>** ist eine Zusammenfassung von Objekten, den **<u>Elementen</u>** der Menge.
Ist x ein Element der Menge M, so schreiben wir kurz

	$x \in M$	(„ x ist ein Element von M“)
sonst	$x \notin M$	(„ x ist kein Element von M“)

Die Menge N heißt **<u>Teilmenge</u>** oder **<u>Untermenge</u>** von M, wenn jedes Element von N auch Element von M ist.

kurz:	$N \subseteq M$	(„N ist enthalten in M“)	$M \supseteq N$
salopp:	$N \subset M$	(„echt enthalten“) bedeutet, das in	
	$N \subsetneq M$	M mindestens ein Element ist, das nicht in N ist.	



Vann - Diagramm

Beispiele:

IN = Natürliche Zahlen
IN = { 1;2;3;4;…}
$IN \supseteq \{1;2;3;4;\}$
$\{1;2;\} \subseteq \{1;2;\}$
$\{1\} \subset \{1;2\}$

Bemerkung

Grundsätzlich können wir Mengen auf zwei Arten beschreiben:
- Durch Angabe der Elemente.
- Durch Beschreibung der Elemente

Beispiel:

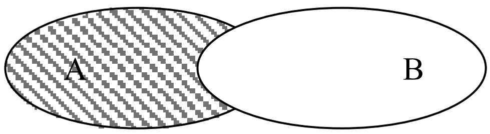
$\{1;2;3;4;\} = \{ n \in IN \mid 1 \leq n \leq 4 \}$
(„ Menge aller n aus IN mit der Eigenschaft …“)

Operationen auf Mengen

Differenzmenge

a) Die **<u>Differenz</u>** A \ B („A ohne B") ist die Menge aller Elemente aus A, die nicht in B sind.

$$A \setminus B = \{ x \in A \mid x \in B \}$$



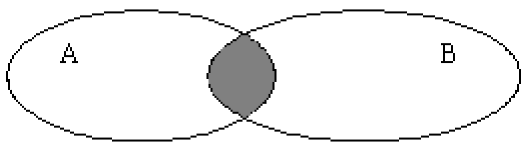
Schnittmenge

b) Der **<u>Durchschnitt</u>** $A \cap B$ („A geschnitten B") ist die Menge aller Elemente, welche in A und in B enthalten sind.

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ und } x \in B\}$$

$$= \{ x \mid x \in A \wedge x \in B \}$$

Und, wie unten offen !!!



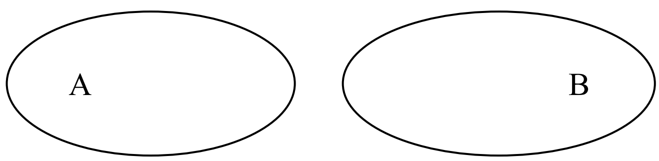
Vereinigungsmenge

c) **<u>Vereinigungsmenge</u>** $A \cup B$ („A vereinigt B") ist die Menge aller Elemente, welche in A oder in B enthalten sind.

$$A \cup B = \{ x \mid x \in A \text{ oder } x \in B \}$$

$$= \{ x \mid x \in A \vee x \in B \}$$

Oder, ist oben offen !!!



Kartesische Produkt

d) Das **kartesische Produkt** A x B („A kreuz B“) ist die Menge aller Paare (a;b) mit $a \in A$ und $b \in B$.

$$A \times B = \{(a;b) \mid a \in A \wedge b \in B\}$$

Potenzmenge

d) Die **Potenzmenge** $P_{(A)}$ ist die Menge aller Teilmengen von A.

Beispiel Geg: A = { 1;2;3} B = {3;4}

A \ B = {1;2}
$A \cap B = \{3\}$
$A \cup B = \{1;2;3;4\}$
$A \times B = \{ (1;3) ; (1;4) ; (2;3) ; (2;4) ; (3;3) ; (3;4) \}$
$P_{(A)} = \{ \{\} ; \{1\} ; \{2\} ; \{3\} ; \{ 1;2\} ; \{1;3\} ; \{1;2;3\} ; \{2;3\}$

Mächtigkeit

Eine Menge M heißt **endlich** wenn sie nur endlich viele Elemente enthält. Für die Anzahl der Elemente einer endlichen Menge schreibt man $|M|$
(„Betrag M oder Mächtigkeit von M“)

$$|\{0;1;2;3\}| = 4$$

Sind A und B endliche Mengen, so gilt:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$
$$= |A| - |B \setminus A|$$

Sind A und B endliche Mengen, so gilt:

$$|A \times B| = |A| \cdot |B|$$

Die Operationen

$\cap$; $\cup$; $\times$ lassen sich von zwei, auf beliebig viele Mengen ausdehnen.

$$A_1 \vee A_2 \vee A_3 = \bigvee_{i=1}^{3} A$$

Abbildungen

Gesetz

Jedem x wird nur ein y Wert zugeordnet. Wird einem x Wert mehrere y Werte zugeordnet, spricht man von einer Relation.

Abbildungsgesetz:

Jedem x ϵ D wird **genau ein** y ϵ B zugeordnet.

$$f: D \longrightarrow B \qquad mit \qquad f: x \mapsto y$$

Injektive Abbildungen

liegen vor, wenn unterschiedlichen Elemente aus dem Definitionsbereich immer auch unterschiedliche Bilder haben. *Sie wird bewiesen mit der Annahme, dass sie gleich sind.*

Bei injektiven Abbildungen gilt:

$$x_1 \neq x_2 \quad \Rightarrow \quad f_{(x_1)} \neq f_{(x_2)}$$

Surjektive Abbildungen

liegen vor, wenn es zu jedem y ϵ B (wenigstens) ein x ϵ D gibt.

Saloper Merksatz:

„Alle y ϵ B müssen irgendwo unter kommen!“

Bijektive Abbildungen

liegen vor, wenn sie sowohl injektiv wie auch surjektiv sind.

Bijektive Abbildung = Injektive + Surjektiveeigenschaft

Permutation

Die Permutation von bijektiven Abbildungen geschieht nach folgenden Regeln:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Die Menge aller möglichen Permutationen ist: $s_n = n\,!$
Das Kommutativgesetz gilt im allgemeinen nicht.

Beweisarten

Direkter Beweis

Um zu beweisen das ein Ausdruck gleich einem anderen ist, werden sie gleichgesetzt und so lange umgeformt, bis links das gleiche steht wie rechts. Oder für den Fall das man es widerlegen wollte genügt ein Gegenbeispiel.

Indirekter Beweis

Man nimmt etwas Falsches an, und beweist das Gegenteil. Für die Injektivität zu beweisen nimmt man an, dass $f_{(x_1)} = f_{(x_2)}$ ist, und erhält so das $x_1 = x_2$ ist.

Vollständige Induktion

A) Als erstes wird die Annahme aufgeschrieben.

B) Es wird für ein n bewiesen.

C) Durch Umformung wird auf den (n + 1) Fall geschlossen.

Definitionen und Rechenregeln

Hinreichend – Notwendig

Beispiel:	A:	Er hat die Klausur bestanden.	Konvergierende Reihe.
	B:	Er hat an der Klausur teilgenommen.	Folge ist Nullfolge.

Hinreichend **Notwendig**

$$A \Rightarrow B$$

Gruppe

Gelten (G1 – G4) bezüglich „+“ so ist dies ein Gruppe. Gilt zudem G5, dann ist es eine kommutative Gruppe, sie ist abelsch.

G1)	$a,b \in Z$	$\rightarrow$	$a + b \in Z$	Abgeschlossenheit
G2)	$a,b,c \in Z$	$\rightarrow$	$a + (b + c) = a + b + c$	Assoziativgesetz
G3)	$0 + a = a$			neutrales Element
G4)	$a + b = 0$			inverses Element
G5)	$a, b \in Z$	$\rightarrow$	$a + b = b + a$	Kommutativgesetz

Körper

Gelten (G1 – G5) und (K1 – K3) und (k5) und D so liegt ein Körper vor.

K1)	$a, b \in Q$	$\rightarrow$	$a \odot b \in Q$	Abgeschlossenheit
K2)	$a, b, c \in Q$	$\rightarrow$	$a \odot (b \odot c) = (a \odot b) \odot c$	Assoziativgesetz
K3)	$1 \in Q$	$\rightarrow$	$a \odot 1 = a$	neutrales Element
K4)	$a \in Q\backslash \{0\}$	$\rightarrow$	$a \odot b = 1$	inverses Element
K5)	$a, b, \in Q$	$\rightarrow$	$a \odot b = b \odot a$	Kommutativgesetz
D)	$a, b, c \in Q$	$\rightarrow$	$a \odot (b + c) = a \odot b + a \odot c$	Distributivgesetz

Unterraum

Unterraumeigenschaften:

1) $U \neq \{\}$
2) Abgeschlossenheit „+“
3) Abgeschlossenheit „$\odot$“

Vektorraum

Vektorraumeigenschaften:

1) (G1 – G5)
2) $(\lambda \odot \mu) \odot v = \lambda \odot v + \mu \odot v$
3) $\lambda \odot (v + w) = \lambda \odot v + \lambda \odot w$
4) $\lambda \odot (\mu \odot v) = (\lambda \odot \mu) \odot v$
5) $1 \odot v = v$

Vektoralgebra

Grunddefinitionen

Skalare

Sind Zahlen oder Größen ohne Richtungssinn, wie z.B. Masse Temperatur.

Vektoren

Sind durch Betrag und Richtung festgelegt.

Gleichheit von Vektoren

Zwei Vektoren werden als gleich betrachtet, wenn sie in Betrag und Richtung übereinstimmen. Vektoren sind gleich, wenn sie durch Parallelverschiebung ineinander überführt werden können. Solche Vektoren nennt man **freie Vektoren** (z.B. Drehmomentsvektoren können auf der Fläche auf der sie angreifen beliebig verschoben werden).
Vektoren welche sich nur auf ihrer Wirkungslinie bewegen können, heißen **gebundene Vektoren** (Kraftvektoren).

Parallele und kollineare Vektoren

Sind Vektoren vom Betrag unterschiedlich, besitzen aber die gleiche Wirkungslinie, dann nennt man sie parallel. Sind sie in der Richtung entgegengesetzt, sind Anti-parallel.
Vektoren mit der gleichen Wirkungslinie heißen kollineare Vektoren.

Lineare Unabhängigkeit von Vektoren

Die Vektoren a_1, a_2, …a_n aus dem *m*- dimensionalen Raum R^m heißen ***linear unabhängig***, wenn die lineare Vektorgleichung

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + ... + \lambda_n a_n = 0$$

nur für $\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_n = 0$ erfüllt werden kann. Daraus folgt, das ein System von *n* Vektoren ***linear abhängig*** ist, wenn eine der folgenden drei Eigenschaften gilt:**(Rang einer Matrix)**

1. **Das Vektorsystem enthält den *Nullvektor*.**
2. **Das Vektorsystem enthält zwei *gleiche* oder zwei *kollineare* Vektoren.**
3. **Mindestens einer der *n* Vektoren ist als *Linearkombination* der übrigen Vektoren darstellbar.**

Komponentendarstellung

$$\vec{v} = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 \ldots\ldots$$

Spaltendarstellung

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Einheitsvektor

Er besitzt die Wirkungslinie des Vektors und hat den Betrag 1.

$$\vec{a}^{\,0} = \frac{1}{|\vec{a}|} \cdot \vec{a}$$

Skalaprodukt

In dem euklidischen Raum ist dies stets zu addieren, im Gegensatz zum unitären Raum.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Rightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$$

Skalaquadrat

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$$

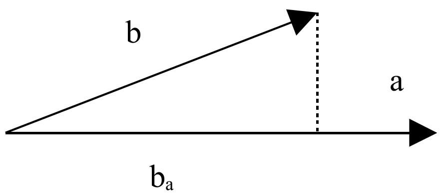
Schnittwinkel

$$\cos\alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} \qquad \begin{array}{l} \vec{a} \cdot \vec{b} > 0 \Rightarrow \alpha < 90^\circ \\ \vec{a} \cdot \vec{b} > 0 \Rightarrow \alpha > 90^\circ \end{array}$$

Projektion eines Vektors

Die Herleitung ist im Anhang aufgeführt.

$$\overrightarrow{b_a} = \left(\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|^2} \right) \cdot \vec{a}$$



Vektorprodukt

Das Vektorprodukt zwischen zwei Vektoren, ergibt einen Vektor, der senkrecht auf ihnen steht, Der Betrag des Vektors ist gleich der Fläche welche von den Ursprungsvektoren aufgespannt wird.
Ist das **Vektorprodukt gleich Null**, müssen die Vektoren **kollinear** verlaufen.

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c} \qquad \vec{c} \perp \vec{a} \; ; \; \vec{c} \perp \vec{b} \qquad |\vec{c}| = |\bar{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin\alpha$$

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_2 \\ a_3 \cdot b_1 - a_1 \cdot b_3 \\ a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1 \end{pmatrix}$$

Rechenregeln:

(*i*) $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$

(*ii*) $\lambda \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = (\lambda \cdot \vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\lambda \cdot \vec{b})$

(*iii*) $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$

(*iv*) $|\vec{a} \times \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 \cdot |\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2$

Spatprodukt

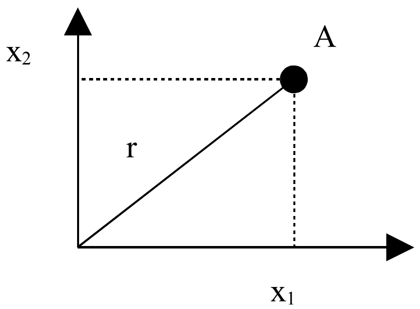
Dieses Produkt wird auch gemischtes Produkt genannt. Es spiegelt das Spatvolumen wider. Ist das Spatvolumen gleich Null, so liegen die Vektoren komplanar, also in einer Ebene.

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \left[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}\right] = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \det = \mathit{Spatvolumen}$$

Analytische Geometrie

Zeichnungen und genauere Erklärungen sind im Anhang unter Geometrie.

Polarkoordinaten



$$x_1 = r \odot \cos\alpha$$

$$x_2 = r \odot \sin\alpha$$

$$r = |\overrightarrow{0P}|$$

Zwei Punkte Form

$$\vec{a} = \overrightarrow{P_1\,P_2} = \begin{pmatrix} P_{2x} & P_{1x} \\ P_{2y} & P_{1y} \end{pmatrix}$$

Punkt Richtungsform einer Geraden

Parameterdarstellung

Ortsvektor zu einen Punkt Richtungsvektor

Abstand eines Punktes von einer Geraden

$$d = \frac{|\vec{a} \times (\vec{r} - \vec{r_1})|}{|\vec{a}|}$$

Schnittpunkt zweier Geraden

Den Schnittpunkt zweier Geraden erhält man, indem man sie gleichsetzt.

Schnittwinkel

Den Schnittwickel erhält man, in dem man den Winkel zwischen den Richtungvektoren berechnet.Punkt Richtungsform einer Ebene

Punkt Richtungsform der Ebene

Parameterdarstellung:

$$\vec{r} = \vec{r_1} + \lambda\ \vec{a} + \mu\ \vec{b}$$

Drei Punkte Form

Eine Ebene die durch drei Punkte gegeben ist:

$$\vec{r} = \overrightarrow{0A} + \lambda \cdot (\overrightarrow{0B}) + \mu \cdot (\overrightarrow{0C} - \overrightarrow{0A})$$

Normalvektor

Der Normalvektor steht senkrecht auf der Ebene.

$$\vec{n} = \vec{a} \times \vec{b}$$

Abstand eines Punktes von der Ebene

$$d = \frac{|\vec{n} \cdot (\overrightarrow{r_P} - \vec{r_1})|}{|\vec{n}|}$$

Schnittpunkt zwischen einer Ebene und einer Gerade

Diesen Schnittpunkt erhält man durch gleichsetzen.

Winkel zwischen einer Geraden und einer Ebene

$$\sin\beta = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{a}|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{a}|}$$

Schnitt zwischen zwei Ebenen

Die Schnittgerade erhält man durch gleichsetzen der Ebenen. Das LG ist unterbestimmt, und so kann ein Parameter frei gewählt werden.

Schnittwinkel zwischen zwei Ebenen

$$\boxed{\cos\alpha = \frac{\vec{n_1} \cdot \vec{n_2}}{|\vec{n_1}| \cdot |\vec{n_2}|}}$$

Spurgerade

Eine Spurgerade ist die Schnittgerade einer Ebene mit den Koordinatenachsen.

Beispiel für Schnitt mit der $x_2 - x_3$ Achse:

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\textit{Wegen Schnitt mit der } x_2 - x_3 \textit{ Achse gilt}: : \qquad x_1 = 0$$

$$\textit{daraus folgt}: \qquad 1 - \lambda - \mu = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \lambda = (1 - \mu)$$

Nun in die Gleichung eingesetz:

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + (1 - \mu) \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Matrizen

Definition

Unter einer Matrix **A** vom Typ *(m, n)* versteht man ein aus $m \cdot n$ reellen Zahlen bestehendes rechteckiges Schema mit *m* waagerechten angeordneten Zeilen und *n* senkrecht angeordneten Spalten:

$$
\begin{array}{c}
\mathbf{A} = \begin{pmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} & \cdots & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} & \cdots & a_{2n} \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ik} & \cdots & a_{in} \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mk} & \cdots & a_{mn}
\end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \\ \leftarrow i\text{-te Zeile} \\ \\ \\ \end{array} \\
\uparrow \\
k\text{-te Spalte}
\end{array}
$$

Einheitsmatrix

Sie ist ein Sonderfall, bei ihr haben die Elemente der Hauptdiagonalen den Wert 1, alle anderen den Wert 0:

$$
E = \begin{pmatrix}
1 & 0 & \dots & 0 \\
0 & 1 & \dots & 0 \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
0 & 0 & \dots & 1
\end{pmatrix}
$$

Transponierte einer Matrix

Werden in einer Matrix **A** Zeilen und Spalten miteinander vertauscht, so erhält man die *Transponierte* $\mathbf{A}^{\mathbf{T}}$ der Matrix **A**.

$$
A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}
$$

Dreiecksmatrix

Eine n-reihige, quadratische Matrix wird als Dreiecksmatrix bezeichnet, wenn alle Elemente ober oder unterhalb der Hauptdiagonalen verschwinden, also 0 sind.

Rechenoperationen

Addition und Subtraktion von Matrizen

Matrizen werden wie Vektoren elementenweise addier und subtrahiert.
Zwei Matrizen $A = a_{ik}$ und $B = b_{ik}$ vom gleichen Typ (m,n) werden addiert, indem man die entsprechenden Matrixelemente addiert:

$$\mathbf{A + B = C = c_{ik} = a_{ik} + b_{ik}}$$

Multiplikation einer Matrix mit einem Skalar

Eine Matrix $A = a_{ik}$ vom Typ (m,n) wird mit einem Skalar λ multipliziert, indem man jedes Matrixelement a_{ik} mit dem Skalar λ multipliziert:

$$\boldsymbol{\lambda} \cdot \mathbf{A} = \boldsymbol{\lambda} \cdot \mathbf{a_{ik}}$$

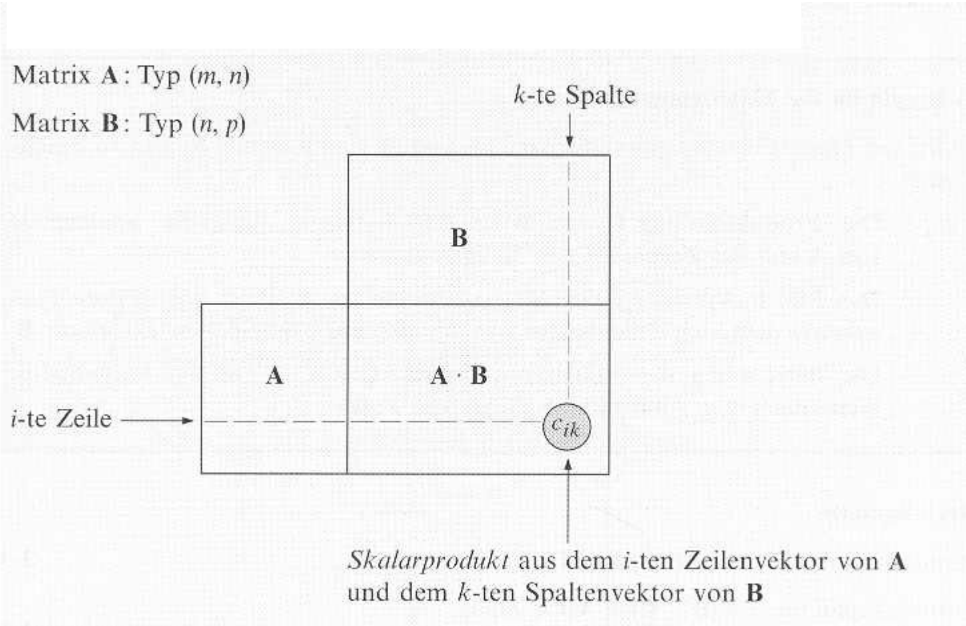
Multiplikation von Matrizen

Matrix $A = a_{ik}$ sei vom Typ (m,n) , $B = b_{ik}$ eine Matrix vom Typ (n,p). Dann heißt die Matrix

$$A \cdot B = C = c_{ik} = a_{i1} \cdot b_{1k} + a_{i2} \cdot b_{2k} + ...+ a_{in} \cdot b_{nk} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot b_{jk}$$

das Produkt der Matrizen A und B (i = 1, 2, … m ; k = 1, 2, ….p).

Falk-Schema zur Berechnung eines Matrizenproduktes C = A ⊙ B



Regeln für die Matrizenmultiplikation

Bei der *Multiplikation* zweier Matrizen A und B sind folgende Regeln zu beachten:

1. Die Produktbildung ist nur möglich, wenn die Spaltenzahl von A mit der Zeilenzahl von B übereinstimmt.

2. Das Matrixelement c_{ik} des Matrizenproduktes A ⊙ B ist das skalare Produkt aus dem i-ten Zeilenvektor von A und dem k-ten Spaltenvektor von B.

3. Rechengesetze:

Assoziativgesetz:	$A\,(BC) = (AB)\,C$
Distributivgesetz:	$A\,(B + C) = AB + AC$
	$(A + B)\,C = AC + BC$
Weitere Gesetze:	$(AB)^T = B^T A^T$
	$AE = EA = A$

Determinanten

Man kann bei **Quadratischen Matrizen** eine Determinante = det bestimmen, deren Wert für verschiedene Anwendungen wichtig ist.

Zweireihige Determinante

Berechnung einer 2-reihigen Determinante

Der Wert der Determinante, ist gleich dem Produkt der beiden Hauptdiagonalelemente minus, dem Produkt der beiden Nebendiagonalelemente.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}$$

——— Hauptdiagonale
- - - - Nebendiagonale

Dreireihige Determinante

Berechnung einer 3-reihigen Determinante nach Sarrus

Die Spalte 1 und 2 der Determinante werden nochmals rechts neben die det. gesetzt. Den Determinantenwert erhält man dann, indem man die drei Hauptdiagonalprodukte addiert und von dieser Summe die drei Nebendiagonalprodukte subtrahiert.

$$\begin{array}{ccc} & - \quad - \quad - & \\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} & \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix} \\ & + \quad + \quad + & \end{array}$$

——— Hauptdiagonalprodukte
- - - - Nebendiagonalprodukte

$$D = a_{11} a_{22} a_{33} + a_{12} a_{23} a_{31} + a_{13} a_{21} a_{32} - - a_{13} a_{22} a_{31} - a_{11} a_{23} a_{32} - a_{12} a_{21} a_{33} \qquad \text{(I-62)}$$

Rechenregeln für n- reihige Determinanten

1. Der Wert einer Determinante ändert sich nicht, wenn Zeilen und Spalten miteinander vertauscht werden.

2. Bei Vertauschen zweier Zeilen (oder Spalten) ändert eine Determinante ihr Vorzeichen.

3. Werden die Elemente einer beliebigen Zeile (oder Spalte) mit einem reellen Skalar λ multipliziert, so multipliziert sich die Determinante mit λ.

4. Eine Determinante wird mit einem Skalar λ multipliziert, indem man die Elemente einer beliebigen Zeile (oder Spalte) mit λ multipliziert.

5. Besitzen die Elemente einer Zeile (oder Spalte) einen gemeinsamen Faktor, so darf dieser vor die det gezogen werden.

6. Eine det besitzt den Wert Null, wenn sie mindestens eine der folgenden Bedingungen erfüllt:

    1. Alle Elemente einer Zeile (oder Spalte) sind Null.
    2. Zwei Zeilen (oder Spalten) sind gleich.
    3. Zwei Zeilen (oder Spalten) sind zueinander proportional.
    4. Eine Zeile (oder Spalte) ist als Linearkombination der übrigen Zeilen (oder Spalten) darstellbar.

7. Der Wert einer det. ändert sich nicht, wenn man zu einer Zeile (oder Spalte) ein beliebiges Vielfaches einer anderen Zeilen (anderen Spalte) addiert.

8. **Multiplikationstheorem für det.**
   Für zwei n- reihige Matrizen A und B gilt stets:

   $$\det(AB) = (\det A)\ (\det B)$$

9. Die det. einer n-reihigen Dreiecksmatrix A besitzt ist gleich dem Produkt der Hauptdiagonalelemente.

Determinanten höherer Ordnung

Um eine Determinante einer Matrix höherer Ordnung zu berechnen, muss man sie aufteilen, und mehrere Unterdeterminanten berechnen.

Dies geschieht in dem man zuerst jedem Element ein Vorzeichen gibt, mit welchem später die det. A errechnet wird.

$$\det A = \begin{vmatrix} \overset{+}{1} & \overset{-}{0} & \overset{+}{-5} & \overset{-}{10} \\ \overset{-}{0} & \overset{+}{1} & \overset{-}{2} & \overset{+}{5} \\ \overset{+}{3} & \overset{-}{0} & \overset{+}{-6} & \overset{-}{3} \\ \overset{-}{1} & \overset{+}{4} & \overset{-}{3} & \overset{+}{2} \end{vmatrix}$$

Danach eine beliebige Zeile (oder Spalte) „Streicht“, und durch „Streichung“ von Spalte (oder Zeile) die sich ergebenden Unterdeterminanten mit dem „Streichungskreuzelement multipliziert. Diese Unterdeterminanten werden nun addiert, bei positiven Vorzeichen, und subtrahiert bei negativen Vorzeichen.

$$\det A = \begin{vmatrix} \overset{+}{1} & \overset{-}{0} & \overset{+}{-5} & \overset{-}{10} \\ \overset{-}{0} & \overset{+}{1} & \overset{-}{2} & \overset{+}{5} \\ \overset{+}{3} & \overset{-}{0} & \overset{+}{-6} & \overset{-}{3} \\ \overset{-}{1} & \overset{+}{4} & \overset{-}{3} & \overset{+}{2} \end{vmatrix} \qquad = \qquad \det .B = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & -6 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 123$$

$$\det A = \begin{vmatrix} \overset{+}{1} & \overset{-}{0} & \overset{+}{-5} & \overset{-}{10} \\ \overset{-}{0} & \overset{+}{1} & \overset{-}{2} & \overset{+}{5} \\ \overset{+}{3} & \overset{-}{0} & \overset{+}{-6} & \overset{-}{3} \\ \overset{-}{1} & \overset{+}{4} & \overset{-}{3} & \overset{+}{2} \end{vmatrix} \qquad = \qquad \det .C = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 5 \\ 3 & -6 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 69$$

$$\det A = \begin{vmatrix} \overset{+}{1} & \overset{-}{0} & \overset{+}{-5} & \overset{-}{10} \\ \overset{-}{0} & \overset{+}{1} & \overset{-}{2} & \overset{+}{5} \\ \overset{+}{3} & \overset{-}{0} & \overset{+}{-6} & \overset{-}{3} \\ \overset{-}{1} & \overset{+}{4} & \overset{-}{3} & \overset{+}{2} \end{vmatrix} \quad = \quad \det.D = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 3 & 0 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 57$$

$$\det A = \begin{vmatrix} \overset{+}{1} & \overset{-}{0} & \overset{+}{-5} & \overset{-}{10} \\ \overset{-}{0} & \overset{+}{1} & \overset{-}{2} & \overset{+}{5} \\ \overset{+}{3} & \overset{-}{0} & \overset{+}{-6} & \overset{-}{3} \\ \overset{-}{1} & \overset{+}{4} & \overset{-}{3} & \overset{+}{2} \end{vmatrix} \quad = \quad \det.E = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & -6 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 9$$

$$\det.A = +\,1 \cdot \det.B \; - \; 0 \cdot \det.C \; + \; (-5) \cdot \det.D \; - \; 10 \cdot \det.E \; = \; -252$$

Wie man sehr schnell erkennt, ist es sehr gut, wenn man Zeilen (oder Spalten) hat, die viele Nullen enthalten.
Dies ist der Grund, weshalb man versucht, zunächst eine die Matrix durch Elementare Umformung auf eine günstigere Form zu bringen. Ist dies gelungen, so kann wie oben beschrieben gerechnet werden.

Elementare Umformungen einer Determinanten

Die folgenden elementaren Umformungen verändern den Wert einer Determinante nicht:

1. Ein den Elementen einer Zeile (oder Spalte) gemeinsamer Faktor darf vor die Determinante gezogen werden.

2. Zu einer Zeile (oder Spalte) darf ein beliebiges Vielfaches einer anderen Zeile (oder Spalte) addiert oder subtrahiert werden.

3. Zwei Zeilen (oder Spalten) dürfen vertauscht werden, wenn gleichsam das Vorzeichen der Determinanten geändert wird.

Reguläre, Singuläre Matrix

Eine n-reihige, quadratische Matrix A heißt *regulär*, wenn ihre Determinante einen von Null verschiedenen Wert besitzt. Anderenfalls heißt sie *singulär*.

Rang einer Matrix

Mit der Kenntnis des Ranges einer Matrix, kann man verschiedene Aussagen treffen.
Fasst man eine Matrix als Vektorsystem auf, gibt der Rang die maximale Anzahl von linear unabhängigen Vektoren wider. Es gilt immer:

Zeilenrang = Spaltenrang = Rang der Matrix

Berechnung des Rangs einer Matrix

Rangbestimmung einer Matrix mit Hilfe elementarer Umformungen

Der *Rang* $\mathrm{Rg}(\mathbf{A})$ einer (m, n)-Matrix $\mathbf{A}$ kann auch wie folgt bestimmt werden: Die Matrix wird zunächst mit Hilfe *elementarer Umformungen* auf die folgende sog. *Trapezform* gebracht:

$$\left.\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1r} & b_{1,r+1} & b_{1,r+2} & \dots & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & \dots & b_{2r} & b_{2,r+1} & b_{2,r+2} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & b_{rr} & b_{r,r+1} & b_{r,r+2} & \dots & b_{rn} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}\begin{matrix} \left.\begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \end{matrix}\right\} r \text{ Zeilen} \\ \left.\begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \end{matrix}\right\} \begin{matrix} m-r \\ \text{Nullzeilen} \end{matrix} \end{matrix}\right. \qquad \text{(I-115)}$$

($b_{ii} \neq 0$ für $i = 1, 2, \dots, r$). Der *Rang* von $\mathbf{A}$ ist dann gleich der *Anzahl* r der *nicht-verschwindenden* Zeilen: $\mathrm{Rg}(\mathbf{A}) = r$.

Elementare Umformung einer Matrix

Der Rang r einer Matrix A ändert sich nicht, wenn sie folgenden elementaren Umformungen unterworfen wird:

1. **Zwei Zeilen (oder Spalten) werden miteinander vertauscht.**
2. **Die Elemente einer Zeile (oder Spalte) werden mit einer beliebigen von Null verschiedenen Zahl multipliziert.**
3. **Zu einer Zahl (oder Spalte) wird ein beliebiges Vielfaches einer anderen Zeilen (Spalte) addiert.**

Inverse Matrix

Das Produkt aus einer quadratischen Matrix mit seiner Inversen ergibt die Einheitsmatrix.

Notwendige und auch hinreichende Bedingung für die Existenz einer Inversen, ist das die Matrix regulär ist.

Berechnung der inversen Matrix nach Gauß-Jordan.

Zu jeder *regulären* n-reihigen Matrix $\mathbf{A}$ gibt es genau eine *inverse* Matrix $\mathbf{A}^{-1}$, die schrittweise wie folgt berechnet werden kann:

1. Zunächst wird aus der **Matrix A** und der n-reihigen Einheitsmatrix $\mathbf{E}$ die neue Matrix

$$(\mathbf{A}\,|\,\mathbf{E}) = \left(\begin{array}{cccc|cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & 0 & 0 & \dots & 1 \end{array}\right) \qquad \text{(I-159)}$$

(unter dem linken Block: $\mathbf{A}$, unter dem rechten Block: $\mathbf{E}$)

vom Typ $(n, 2n)$ gebildet.

2. Diese Matrix wird nun mit Hilfe *elementarer Zeilenumformungen* so umgeformt, daß die Einheitsmatrix $\mathbf{E}$ den ursprünglichen Platz der Matrix $\mathbf{A}$ einnimmt. Die gesuchte *inverse* Matrix $\mathbf{A}^{-1}$ befindet sich dann auf dem ursprünglichen Platz der Einheitsmatrix $\mathbf{E}$:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & \dots & 0 & b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{array}\right) = (\mathbf{E}\,|\,\mathbf{A}^{-1}) \qquad \text{(I-160)}$$

(unter dem linken Block: $\mathbf{E}$, unter dem rechten Block: $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}$)

Orthogonale Matrix

Eine n-reihige, quadratische Matrix A heißt orthogonal, wenn das Matrizenprodukt aus A und ihrer Transponierten A^T die Einheitsmatrix E ergibt.

$$\mathbf{A} \circ \mathbf{A}^T = \mathbf{E} \;\rightarrow\; \mathbf{A}^T = \mathbf{A}^{-1}$$

Eigenschaften

1. Die Zeilen- bzw. Spaltenvektoren einer orthogonalen Matrix A bilden ein orthonoriertes System, stellen also zueinander orthogonale Einheitsvektoren dar.
2. Die det. einer orthogonalen Matrix A besitzt den Wert 1 oder -1.
3. Das Produkt orthogonaler Matrizen ist wiederum eine orthogonale Matrix.

Lineares Gleichungssystem

Allgemein

Man kann ein Lineares Gleichungssystem, also eine Anzahl von *m* Gleichungen und *n* Unbekannten, als eine Multiplikation zwischen einer Matrix und einem Vektor betrachten.

$$
\begin{array}{l}
a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 + \ldots.. + a_{1n}\,x_n = c_1 \\
a_{21}\,x_1 + a_{22}\,x_2 + \ldots.. + a_{2n}\,x_n = c_2 \\
\quad\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\quad \vdots \\
a_{m1}\,x_1 + a_{m2}\,x_2 + \ldots... + a_{mn}\,x_n = c_m
\end{array}
\quad \Longrightarrow \quad
\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}}_{\textbf{Koeffizientenmatrix } A}
\bullet
\underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}}_{\textbf{Lösungsvektor } L}
=
\underbrace{\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_m \end{bmatrix}}_{\textbf{Ergebnisvektor } E}
$$

Durch ausmultiplizieren der Matrix, und späterem auffassen der Spalten als die Summe von Vektoren erhält man wieder das LGS. Ist man sich bewusst, dass sich der Lösungsvektor nicht verändern kann, egal was für Operationen auf die Matrix losgelassen werden, kann man dieses auch als *erweiterte Koeffizientenmatrix* schreiben:

$$
\left(\begin{array}{cccc|c}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & c_1 \\
a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & c_2 \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & cm
\end{array}\right)
$$

Den äquivalenten Umformungen eines linearen Gleichungssystem Ax = c entsprechen elementare Zeilenumformungen in der Koeffizientenmatrix A und der erweiterten Koeffizientenmatrix (A|c).

Elementare Zeilenumformungen

1. **Vertauschen zweier Zeilen.**
2. **Multiplikation einer Zeile mit einer von Null verschiedenen Zahl.**
3. **Addition eines Vielfachen einer Zeile zu einer anderen Zeile.**

Lösung mit Hilfe von Gauß

Im Falle der Lösbarkeit des LGS lassen sich die Lösungen wie folgt gewinnen:

Zunächst wird die erweiterte Koeffizientenmatrix (A|c) mit Hilfe elementarer Zeilenumformung in eine ranggleiche Matrix

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a^*_{11} & a^*_{12} & \cdots & a^*_{1n} & c^*_1 \\ 0 & a^*_{22} & \cdots & a^*_{2n} & c^*_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a^*_{mn} & c^*_m \end{array}\right)$$

Das LGS liegt dann in einer gestaffelten Form vor und lässt sich *sukzessiv* von unten nach oben lösen.

Lösung mit Hilfe von Gauß, Jordan

Die Berechnung des Lösungsvektors, ist im Grunde ähnlich wie nach Gauß, nur mit dem Unterschied, das eine erweiterte Matrix angestrebt wird, bei der alle außer den Hauptdiagonalelementen der Koeffizientenmatrix Null sind. Die Elemente der Hauptdiagonalen müssen eins sein. Dann lässt sich nämlich der Lösungsvektor direkt ablesen. Diese Methode ist besonders geeignet um sie mit einem Computer zu berechnen. Denn man kann sukzessiv und iterativ, über die Bildung eines Pivotelementes die erweiterte Koeffizientenmatrix auf eine solche Form bringen.

Diese Form gilt für quadratische Matrizen mit m Zeilen, Spalten.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \cdots & 0 & c^*_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & c^*_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & c^*_m \end{array}\right) \Rightarrow \begin{pmatrix} c^*_1 \\ c^*_2 \\ \vdots \\ c^*_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$$

Lösung mit Hilfe der Inversen

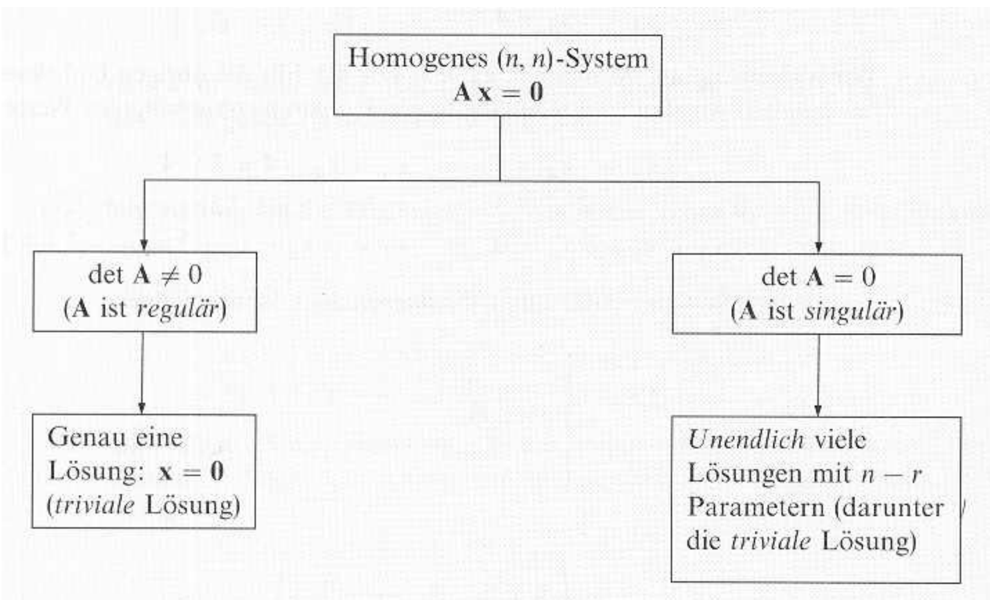
In Fällen, wo bei einem LGS die Koeffizientenmatrix gleich bleibt, aber verschiedene Lösungsvektoren zu mehreren Ergebnisvektoren gesucht werden, ist es ratsam die Lösung über die Inverse zu berechnen.

Mit Hilfe einer inversen Koeffizientenmatrix können leicht Lösungsvektoren zu verschiedenen Ergebnisvektoren gefunden werde.

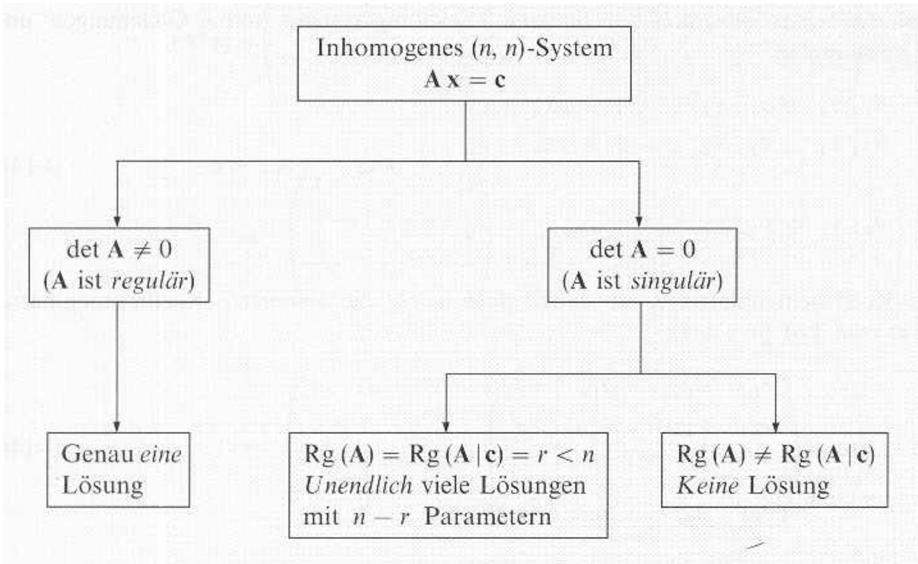
$$A^{-1} \cdot E = L$$

Lösungsverhalten von LGS

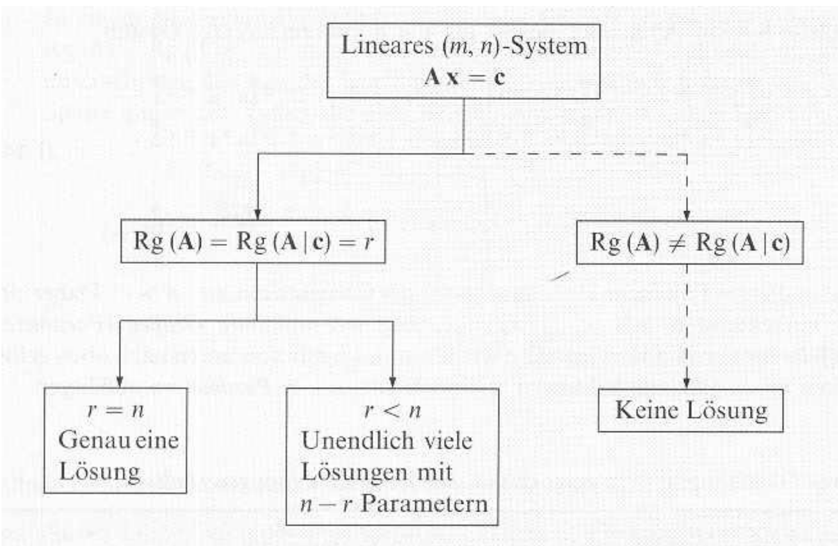
Homogenes nn-System



Inhomogenes nn-System



Allgemeines mn-System



Lineare Abbildungen

Definition

Man spricht von linearen Abbildungen, wenn die folgenden beiden Bedingungen erfüllt sind.
Mit **Homomorphismus** (Hom (VW)) bezeichnet man alle linearen Abbildungen.
Eine Matrix A kann also als lineare Abbildung aufgefasst werden.

Lineare Abbildung wenn gilt:

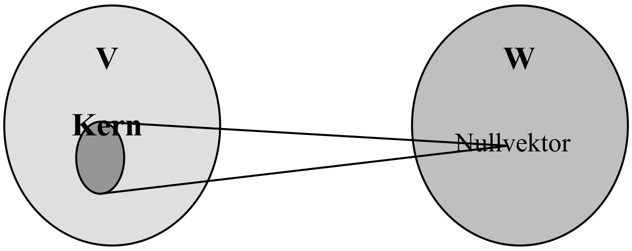
1. $A \cdot (v_1 + v_2) = A v_1 + A v_2$

2. $A \cdot (\lambda \cdot v) = \lambda \cdot (A \cdot v)$

Ist A eine lineare Abbildung **A: V → W** dann ist A ein Unterraum von **W.**

Kern einer Matrix

Der Kern einer Matrix, sind die Vektoren, welche durch die Matrix auf den Nullvektor abgebildet werden.



$$ {}_{\dim W} A_{\dim V} : V \rightarrow W $$

Kern – Bild Satz

dim Kern A = dim V - Rg A

dim Kern A ≥ dim V - dim W

Berechnung des Kerns

Die Berechnung erfolgt nach der Definition. Der Kern von A ist der Lösungsvektor des Homogenen LGS der Matrix. Dieser wird in der Form der Punktrichtungsform der Analytischen Geometrie aufgeschrieben.

Der Kern der Matrix A ist:

$$ KernA = E \ \ von\ dem\ LGS: \ A \cdot E = 0 $$

Lineare Abbildungseigenschaften von Matrizen

Injektivität einer Matrix (Abbildung)

Eine Matrix bildet injektiv ab, wenn der Kern A = 0 ist. Dies ist klar, da bei der Linearen Abbildung bei verschiedenen Vektoren von V immer verschiedene Vektoren von W mit Ausnahme des Nullvektors bebildet werden. Das heißt, es können mehrere Vektoren von V in den Nullvektor von W abgebildet werden. Aber nie können zwei unterschiedliche Vektoren von V in denselben Vektor von W abgebildet werden.

Injektiv wenn:

Kern A = { 0 }

Surjektivität einer Matrix (Abbildung)

Surjektiv wenn:

Rg A = dim W

Bijektivität einer Matrix (Abbildung)

Ist A€Hom(V,W) bijektiv, so heißt dies **Isomorphismus**.

Bijektiv wenn:

Rg A = dim W = dim V

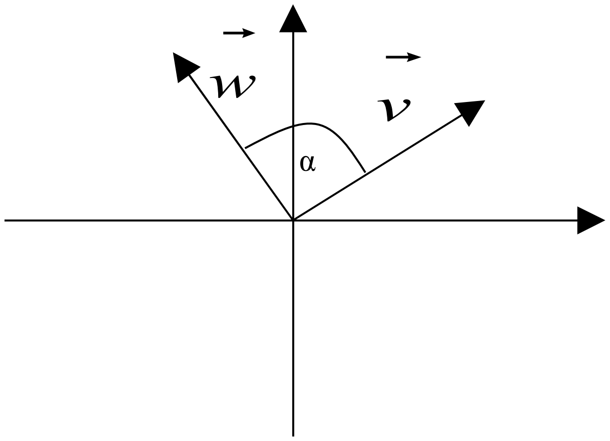
Tensoren

Eine lineare Abbildung stellt einen Zusammenhang zwischen zwei Vektoren da. Um auf die Abbildungsvorschrift (Matrix) zu kommen, kann man sich zu ihrer Bildung eine beliebige Basis aussuchen.

Beispiel:

Es soll die Abbildungsvorschrift für eine Drehung eines Vektors im R^2 um einen Winkel α gefunden werden.

Skizze:



Nun kann durch schrittweise Überlegung eine Matrix erstellt werden, die genau dies tut.
Wir stellen uns zuerst von, was die Matrix mit den Einheitsvektoren tun würde. Danach setzen wir die erhaltenen Abgebildeten Einheitsvektoren zu einer Matrix zusammen. Man könnte auch irgendwelche Vektoren wählen können (die eine Basis bilden) um die Matrix zu erzeugen.

$$A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix} \quad und \quad A \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin\alpha \\ \cos\alpha \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$